

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

(опорный конспект лекций)

ЧАСТЬ 1. ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН, ОСНОВЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ МАШИН

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Механика - наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел.

Обычно под механикой понимают так называемую классическую механику, в основу которой положены законы Ньютона. Классическая механика исследует движение макроскопических тел со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Движение тел (частиц) со скоростями, близкими к скорости света, изучается в теории относительности, а движение микрочастиц - в квантовой механике.

В зависимости от характера исследуемой системы различают механику материальной точки, системы точек, системы переменной массы, абсолютно твердого тела, сплошной среды и др.

В конце XVIII века вследствие бурного развития промышленности и необходимости решения неотложных практических задач произошло разделение классической механики на теоретическую и прикладную.

Теоретическая механика изучает общие закономерности физических явлений, а предметом исследования прикладной механики являются законы движения и взаимодействие реальных технических объектов. Прикладная механика как самостоятельная дисциплина получила развитие при решении прежде всего практических задач.

История развития прикладной механики - это история последовательного решения практических задач в различных областях знаний.

Механика - одна из древнейших наук. Человек пользовался простейшими орудиями труда с незапамятных времен. Постепенно эти орудия совершенствовались. С их помощью еще до н. э. были построены в Египте и странах древнего Востока грандиозные пирамиды, каменные здания и ирригационные сооружения, некоторые из них сохранились до наших дней. До сих пор удивляет огромное искусство древних строителей рассчитывать прочность своих сооружений.

Из числа первых дошедших до нас научных сочинений следует отметить труды философа древней Греции Аристотеля (384-322 г. г. до

н. э.), который и назвал механикой область знаний о движении материальных тел. В рассуждениях Аристотеля с современных позиций много наивного и непоследовательного. Но некоторые из его высказываний были правильными, в частности - догадка об условии равновесия рычага. Научную основу равновесия рычага и принципов статики твердого тела разработал гениальный Архимед (287-212 г. г. до н. э.). Он первый применил математический метод исследования проблем механики.

Эпоха Возрождения знаменуется новым расцветом механики как науки.

Одним из тех, кто исследовал движение брошенных и свободно падающих тел, был гениальный итальянский ученый, художник, инженер Леонардо-да-Винчи (1452-1519). Он занимался также экспериментальным определением прочности канатов и стержней.

Огромные достижения в области механики связаны с именем другого итальянского гения Галилео Галилея (1564-1642). Галилей установил закон инерционности прямолинейного и равномерного движения тел при отсутствии действия каких-либо внешних сил, сформулировал законы падения тел, построил правильную количественную теорию движения тяжелых тел вдоль наклонной плоскости и теорию движения тела, брошенного под углом к горизонту. С именем Галилея связано начало развития науки о прочности. В первой половине XVII в. он опубликовал труд «Беседы и математические доказательства двух новых отраслей науки», где содержатся первые сведения о расчете балок.

К середине XVII века механика сформировалась в самостоятельную науку. Огромную роль в этом сыграли труды голландского ученого Гюйгенса (1629-1695) и великого английского ученого И. Ньютона (1642-1726), Ньютон гениально обобщил идеи своих предшественников - Галилея, Кеплера, Декарта, Гюйгенса и сформулировал основополагающие законы механики и закон всемирного тяготения.

Решая задачи механики, Ньютон разработал математический аппарат, содержащий основы дифференциального и интегрального исчисления.

Методы математического анализа систематически использовал при решении задач механики Л. Эйлер (1707-1783), который большую часть своей творческой жизни провел в России, ставшей для него второй родиной (родился Эйлер в Швейцарии). Используя аналитический метод, Эйлер разработал теорию несвободного движения точки, создал теорию движения тела, дал точные расчеты движения тел в различных средах и многое другое. В сопротивлении материалов до сих пор используют формулу Эйлера при решении задач на устойчивость сжатых стержней. Аналитический метод решения задач механики достиг определенного совершенства в «Аналитической механике» французского ученого Ж. Лагранжа

(1736-1813). Большую роль в развитии механики в России сыграли труды гениального ученого энциклопедиста М. В. Ломоносова (1711-1765). Он первый сформулировал фундаментальный закон природы - закон сохранения вещества, имеющий принципиальное значение и для механики; дал близкую к современной трактовку понятия силы; создал школу научной и прикладной оптики, изобрел горизонтоскоп, морской хронометр с четырьмя заводными пружинами; занимался исследованиями повышения чувствительности приборов путем уменьшения трения в опорах. М. В. Ломоносов страстно отстаивал необходимость тесной связи теории с практикой. Благодаря Ломоносову и Эйлеру Российская Академия стала крупнейшим мировым центром науки.

XIX век можно охарактеризовать появлением большого числа различных двигателей, станков, паровых машин и паровозов, а также бурным развитием железнодорожного транспорта, что в свою очередь, вызвало необходимость постройки мостов и других сооружений. Поэтому основополагающими стали работы выдающегося русского механика М. С. Остроградского (1801-1856) и крупного ученого мостостроителя Д. И. Журавского (1821-1891); «отца» русской авиации Н.Е.Жуковского (1847-1921), автора известного в свое время учебника по теоретической механике; И. В. Мещерского (1859-1935), заложившего основы механики тел переменной массы, его задачник по теоретической механике переиздается и в наши дни. Продолжателем идей Жуковского стал академик С. А. Чаплыгин (1869-

1942), разработавший, в частности, оригинальную теорию решетчатого (разрезного) крыла, нашедшую сейчас широкое применение в расчетах турбомашин.

В XX в. И. Г. Бубнов (1872-1919) и А. Н. Крылов (1863-1945) создали фундаментальные труды по строительной механике корабля. Б. Г. Галеркин (1871-1945) занимался расчетами пластин и оболочек.

В связи с интенсивным развитием машинного промышленного производства из механики выделились самостоятельные научные дисциплины - теория механизмов и машин, сопротивление материалов, конструирование и расчет деталей машин.

Ученым-механикам принадлежит честь решения таких проблем, как запуск первого искусственного спутника Земли, фотографирование обратной стороны Луны, первые полеты человека в космическое пространство и высадка людей на поверхность Луны. Особо следует отметить замечательного русского ученого и изобретателя К. Э. Циолковского (1857-1935), заложившего основы теории реактивного движения и космических полетов. Мечта людей о покорении космоса стала реальностью в результате деятельности выдающегося советского ученого академика С. П. Королева

(1906-1966) - генерального конструктора космических кораблей «Восток» и «Восход». Первым человеком, осуществившим полет в космос 12 апреля 1961 г. был Ю. А. Гагарин (1934-1968). В наши дни полеты в космическое пространство совершаются регулярно.

Достижения отечественных ученых в области механики дают возможность решать сложные практические проблемы в технике и способствуют развитию других фундаментальных наук.

Механическое движение - *происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве.*

Частным случаем механического движения тела является состояние относительного покоя, т. е. отсутствие перемещения рассматриваемого тела относительно другого, принятого за начало отсчета. Абсолютно неподвижных тел в природе не существует; всякий покой - это лишь относительная неподвижность. *Состояние покоя, или инерционного движения, называют равновесием тела.*

К инерционному движению тела относят: равномерное прямолинейное поступательное движение, равномерное вращение вокруг неподвижной оси и общий случай - равномерное винтовое движение (сложное движение, при котором центр тяжести тела движется прямолинейно и равномерно, а все тело равномерно вращается вокруг оси, проходящей через его центр тяжести).

Техника (от греч. *technē* - искусство, мастерство, умение) - *совокупность средств человеческой деятельности, созданных для осуществления процессов производства и обслуживания производственных потребностей общества*¹.

Различают технику производственную (машины, механизмы, инструменты, аппаратура управления машинами и технологическими процессами, производственные здания и сооружения, средства транспорта, связи и т. д.) и производственную (бытовая,

коммунальная, для научных исследований, образования, культуры, военная, медицинская, спортивная и др.).

Современная техника характеризуется ускорением темпов ее модернизации, стандартизацией и унификацией, широким использованием средств автоматики, телемеханики, ЭВМ и др.

Главными, доминирующими понятиями техники являются слова «**машина**» и «**механизм**».

Слово машина происходит от латинского слова *machina*, что в переводе на русский означает «сооружение». Если его произнести вслух по-русски - махина, - то можно представить размер древних машин. Впервые же это слово встречается у Архимеда и звучит на греческом языке как «механе», откуда и произошло слово «механика».

Если вдуматься в вышеприведенное определение машины, то получается, что этот термин иногда применяется не по назначению. Например, в электронно-вычислительных машинах может совершенно отсутствовать механическое движение. По этой же причине вряд ли правомерно электрические трансформаторы относить к электрическим машинам. Известные нам машины не только заменяют или облегчают труд человека, но и многократно повышают его производительность. Компьютер считает невообразимо быстрее человека; автомобиль, имея большую грузоподъемность, и движется со значительно большей скоростью. Много таких машин, которые выполняют операции, которые человек сделать вообще не в состоянии. Поэтому к определению слова «машина» необходимо подходить с учетом этих замечаний.

По мере развития техники содержание термина «машина» изменилось. Для современных машин дадим следующее определение.

Машина - *устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения физического и умственного труда человека.*

В этом определении под материалами понимаются обрабатываемые предметы, перемещаемые грузы и другие объекты труда.

Развитие современной науки и техники неразрывно связано с созданием новых машин, повышающих производительность и

облегчающих труд людей, а также обеспечивающих средства исследования законов природы и жизни человека.

Целью создания машины является увеличение производительности и облегчения физического труда человека путем замены человека машиной. В некоторых случаях машина может заменять человека не только в его физическом, но и в умственном труде. Так, например, счетно-решающие машины заменяют человека или помогают ему в проведении необходимых математических операций, информационные машины обрабатывают большое количество заложенных в них человеком сведений и дают ему требуемую информацию и т. д. Созданные человеком машины могут управлять производственными и другими процессами по определенным, заранее составленным программам и в некоторых случаях автоматически обеспечивать процессы с оптимальными результатами.

Наконец, машины могут в некоторых случаях заменять отдельные органы человека, такие, например, как конечности (механизмы манипуляторов, протезы), сердце (искусственное сердце) и т. д.

Таким образом, понятием машины охватывается большое число самых различных объектов, применяемых человеком для своих трудовых и физиологических функций.

С точки зрения выполняемых функций машины можно разделить на следующие классы [2]:

- а) энергетические,
- б) рабочие,
- в) информационные,
- г) кибернетические.

Энергетической машиной называется машина, предназначенная для преобразования любого вида энергии в механическую (и наоборот). В первом случае она носит название *машины-двигателя*, во втором случае — *машины-генератора*.

Примерами энергетических машин являются электрические двигатели, двигатель внутреннего сгорания, турбины и т. д.

Рабочей машиной называется машина, предназначенная для преобразования материалов. Рабочие машины подразделяются на транспортные и технологические машины.

Транспортной машиной называется машина, в которой преобразование материала состоит только в изменении положения основного перемещаемого объекта.

К транспортным машинам относятся локомотивы, автомобили, тракторы, лифты, транспортеры, эскалаторы и др.

Технологической машиной называется рабочая машина, в которой преобразование материала состоит в изменении формы, свойства и состояния материала или обрабатываемого объекта.

Класс технологических машин разнообразен. К ним принадлежат станки, текстильные машины, машины, используемые в сельском хозяйстве, полиграфические, пищевые и многие другие машины.

Информационной машиной называется машина для получения и преобразования информации. Информационные машины подразделяются на контрольно-управляющие и математические машины.

Контрольно-управляющей машиной называется машина, которая преобразует получаемую контрольно-измерительную информацию с целью управления энергетической или рабочей машинами.

В связи с повышением производительности машин и скоростей движения отдельных их частей, а также в связи с требованиями к высокому качеству изделий человек стал испытывать существенные затруднения в управлении машинами, контроле технологических процессов, выполняемых машинами, измерении отдельных параметров выпускаемой продукции и т. д. В прежних, более примитивных, машинах реакция человека была достаточной для того, чтобы изменить режим движения и работы машины, если эти режимы и работа отклонялись от нормальных. Теперь, когда продолжительность многих рабочих процессов измеряется весьма малыми долями времени, когда многие процессы являются непрерывными, физиология человека лимитирует его непосредственную реакцию на отклонение рабочего процесса от нормального. Поэтому человек стал создавать искусственные средства управления, контроля и измерения. Такими средствами, хорошо известными в тех-

нике, являются различные регуляторы и системы автоматического регулирования рабочих процессов, приборы контроля и измерения параметров этих процессов и т. д. В некоторых случаях стало целесообразным

создание специальных машин для управления процессами и их контроля. Так, например, для автоматизации контроля размеров поршневых колец, пальцев, шариков для шарикоподшипников и многих других объектов стали создаваться контрольно-измерительные машины, которые производят не только обмер деталей, но и их сортировку по размерам и другим показателям. В современные автоматические линии встраиваются различные контрольно-измерительные машины и приборы, которые не только контролируют процесс, но и управляют им, сигнализируя и автоматически корректируя работу автоматических линий и систем.

Математической машиной называется машина, которая преобразует информацию, получаемую в виде различных математических образов, заданных в форме отдельных чисел или алгоритмов.

Широкое развитие как для управления и контроля над процессами, так и для замены умственного труда человека получили *логические машины*. К этим машинам относятся счетно-решающие машины, машины, моделирующие различные процессы, информационные машины и др.

Кибернетической машиной называется машина, заменяющая или имитирующая различные механические, физиологические или биологические процессы, присущие человеку и живой природе, и обладающая элементами искусственного интеллекта.

Примерами таких машин являются: а) машины, опознающие тот или иной образ, например буквы, и, следовательно, способные как бы читать; б) машины, воспроизводящие человеческую речь по заданным акустическим спектрам; в) машины, выполняющие различные движения по устной команде человека; г) машины, заменяющие отдельные органы человека (сердце, почки, конечности и т. д.) в условиях медицинской, операционной или биологической исследовательской практики или в случаях, связанных с органическими нарушениями нормальной физиологии человека.

В последние годы стали создаваться кибернетические машины, выполняющие требуемые механические движения с помощью соответствующих систем управления, в которых используются ЭВМ, биотоки, специальные управляющие приводы и т. д. Это — автооператоры,

роботы, манипуляторы, шагающие, ползающие и другие машины. Отличительной их особенностью является то, что рабочие органы этих машин выполняют механические движения, свойственные органам человека или животных. Например, робот имеет как бы «руку», выполняющую заданные технологические операции. Шагающая машина имеет «ноги» и в какой-то мере имитирует движения, свойственные животным или насекомым. Ползающие машины своими элементами напоминают гусеницу или змею и т. д. Но главным в кибернетических машинах является их «очувствление», т. е. оснащение этих машин искусственным осязанием с помощью соответствующих датчиков, искусственным зрением с помощью телевизионных устройств и т. д. С помощью специальных управляющих машин роботы, манипуляторы, шагающие и другие машины оснащаются как бы «искусствен-

ным интеллектом», т. е. по заложенной в систему управления программе могут выполнять технологические операции того или другого вида в зависимости от ситуации, например, при сборке каких-либо узлов выбирать требуемые детали, различая их по форме, цвету, геометрическим параметрам и т. д., перемещаться по различным поверхностям, обходя препятствия на своем пути или перешагивая через них, и т. д.

Машина, в которой все преобразования энергии, материалов и информации выполняются без непосредственного участия человека, называется *машиной-автоматом*. Применение машин-автоматов, однако, предполагает присутствие человека (оператора), наблюдающего за их работой и изменяющего в необходимых случаях программу действия. Машины-автоматы, соединенные между собой автоматическими транспортными устройствами и предназначенные для выполнения определенного технологического процесса, образуют *автоматическую линию*. Машина, особенно машина-автомат, при правильном ее использовании облегчает труд человека, увеличивает производительность труда, обеспечивает высокое качество выполнения рабочего процесса.

В общем случае машиной называют систему, включающую в себя двигатель М, передающий механизм ПМ и рабочий орган РО (рис. 1.1).

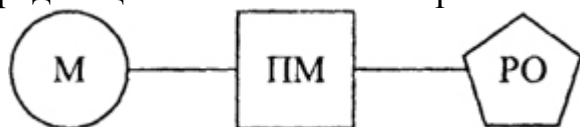


Рис. 1.1. Структурная схема машины

Механизм. Определение термина «механизм» неоднократно менялось по мере того, как появлялись качественно новые механизмы. Еще сравнительно недавно считали, что механизм может состоять только из твердых тел. Современное определение этого термина предусматривает, что в состав механизма могут входить также жидкие и газообразные тела.

Механизмом называют искусственно созданную систему тел, предназначенную для преобразования механического движения одного или нескольких тел в движение других тел [2].

Если в состав механизма кроме твердых тел входят жидкие или газообразные тела или электрические, магнитные и другие устройства, то такие механизм называют соответственно гидравлическими, пневматическими или электрическими.

Из определения механизма следует, что нельзя называть механизмом устройство, в котором нет преобразования механического движения. Например, ротор электродвигателя и подшипники, в которых он вращается, не образуют механизма, так как в этом случае взаимодействие магнитного поля и проводника с током дает требуемое движение без какого-либо промежуточного преобразования механического движения. Механизм в электродвигателе появляется только тогда, когда требуется уменьшить угловую скорость выходного вала по сравнению с угловой скоростью ротора (электродвигатель со встроенным редуктором).

Механизмы входят в состав многих машин, так как выполнение механических движений для преобразования энергии, материалов и информации требует обычно преобразования движения, получаемого от двигателя. Однако нельзя отождествлять понятия «машина» и «механизм». Во-первых, кроме механизмов в машине всегда имеются дополнительные устройства, связанные с управлением

механизмами (пуск, блокировка, контроль и т. п.). Особенно развиты эти устройства в машинах-автоматах, где они образуют систему автоматического управления. Во-вторых, есть машины, в которых нет механизмов. Например, в последние годы появились технологические машины, в которых каждый исполнительный орган приводится в движение от индивидуального электродвигателя или гидродвигателя.

Несмотря на указанную тенденцию к сокращению числа механизмов в машине, все же они составляют важнейшую, хотя и не единственную часть большинства машин. Кроме того, механизмы применяются в приборах, аппаратах и других технологических устройствах.

Простейшие механизмы (рычажные, зубчатые и др.) были известны с давних времен; постепенно шел процесс их исследования, совершенствования и внедрения в практику с целью облегчить труд человека, повысить производительность труда.

Так, известно, что выдающийся деятель культуры эпохи Возрождения и ученый Леонардо да Винчи (1452-1519) разработал проекты конструкций механизмов ткацких станков, печатных и деревообрабатывающих машин, им сделана попытка определить экспериментальным путем коэффициент трения. Итальянский врач и математик Д. Кардан (1501-1576) изучал движение механизмов часов и мельниц. Французские ученые Г. Амонтон (1663-1705) и Ш. Кулон (1736-1806) первыми предложили формулы для определения силы трения покоя и скольжения.

В 1724 г. по инициативе Петра I в России была основана Академия наук, деятельность которой была посвящена решению практических задач по постройке сооружений и машин, развитию отечественного кораблестроения, артиллерии и другой техники.

Значительный вклад в развитие механизмов и машин в XVIII столетии внесли великие русские ученые и изобретатели М. В. Ломоносов, И. И. Ползунов, И. П. Кулибин.

М. В. Ломоносов разработал конструкции машин для производства стекла и испытаний материалов.

Известный русский механик и изобретатель И. И. Ползунов (1728-1766) впервые разработал проект механизма двухцилиндрового парового двигателя (осуществить который ему, к сожалению, не удалось), сконструировал автоматический регулятор питания котла водой, устройство для подачи

воды и пара и другие механизмы. Выдающийся механик И. И. Кулибин (1735-1818) создал знаменитые часы в форме яйца, представляющие собой самый сложный по тем временам механизм автоматического действия, разработал механизм протеза, «водохода», «самокатки» - прообраза будущих автомобилей.

Выдающийся математик и механик Л. Эйлер (1707-1783), швейцарец по происхождению, тридцать лет жил и работал в России, профессор, а затем действительный член Петербургской Академии наук, автор 850 научных трудов, решил ряд задач по кинематике и динамике твердого тела, исследовал колебания и устойчивость упругих тел, занимался и вопросами практической механики, исследовал, в частности, различные профили зубьев зубчатых колес и пришел к выводу о том, что наиболее перспективный профиль - эвольвентный.

Машиностроение, как отрасль промышленности, начало складываться еще в XVIII в., а в XIX в. оно стало быстро развиваться, особенно в Англии и США.

В России первые машиностроительные заводы появились в XVIII в.; в 1861 г. их было уже свыше ста, а в 1900 г. - примерно 1417.

В связи с развитием машиностроения появилась потребность в разработке общих научных методов исследования и проектирования механизмов, входящих в состав машин. Эти методы способствовали созданию наиболее совершенных для своего времени машин, выполняющих наилучшим образом определенные требуемые функции. Так, знаменитый русский математик и механик, академик П. Л. Чебышев (1821-1894) опубликовал 15 работ по структуре и синтезу рычажных механизмов, при этом на основе разработанных методов он изобрел и построил свыше 40 различных новых механизмов, осуществляющих заданную траекторию, останов некоторых звеньев при движении других и т. д.; структурная формула плоских механизмов называется сейчас формулой Чебышева.

Немецкий ученый Ф. Грасгоф (1826-1893) дал математическую формулировку условия проворачиваемости звена плоского рычажного механизма, которое необходимо при его синтезе. Английские математики Д.Сильвестр (1814-1897) и С. Роберте (1827-1913) разработали теорию рычажных механизмов для преобразования кривых (пантографов), С. Роберте занимался и изучением шатунных кривых.

И. А. Вышнеградский (1831-1895), известный как один из основоположников теории автоматического регулирования, сконструировал ряд машин и механизмов (автоматический пресс, подъемные машины, регулятор насоса) и, будучи профессором Петербургского технологического института, создал научную школу конструирования машин.

Методы синтеза зубчатых механизмов, широко применяемых в различных машинах, отличаются определенной сложностью. Многие ученые работали в этой области. Французский геометр Т. Оливье (1793-1858) обосновал метод синтеза сопряженных поверхностей в плоских и пространственных зацеплениях посредством движения вспомогательной поверхности.

Английский ученый Р. Виллис (1800-1875) доказал основную теорему плоского зацепления и предложил аналитический метод исследования планетарных зубчатых механизмов. Немецкий машиновед Ф. Рело (1829-1905) разработал графический метод синтеза сопряженных профилей, известный в настоящее время как «метод нормалей». Рело также является автором работ по структуре (строению) и кинематике механизмов. Русский ученый Х. И. Гохман (1851-1916) одним из первых опубликовал работу по аналитической теории зацепления.

Значительный вклад в динамику машин внес своими трудами Н. Е. Жуковский. Он был не только основоположником современной аэродинамики, но и автором целого ряда работ по теоретической и прикладной механике, теории механизмов, работ по исследованию распределения нагрузки между витками резьбы, автор теоремы о жестком рычаге («рычаг Жуковского»).

В. Л. Кирпичев (1845-1913) - автор графических методов кинематики и статики механизмов.

Развитию механики машин способствовали работы Н. П. Петрова (1836-1920), заложившего основы гидродинамической теории смазки, В. П. Горячкина (1868-

1935), который разработал теоретические основы расчета и построения сельскохозяйственных машин, вся сложность расчета которых заключается в том, что их исполнительные механизмы должны воспроизводить движения руки человека.

Русский ученый Л. В. Ассур (1878-1920) открыл общую закономерность в структуре многозвенных плоских механизмов, применяемую и сейчас при их анализе и синтезе. Он же разработал метод «особых точек» для кинематического анализа сложных рычажных механизмов. А. П. Малышев (1879-1962) предложил теорию структурного анализа и синтеза применительно к сложным плоским и пространственным механизмам.

Существенный вклад в становление механики машин как цельной теории машиностроения внес И.И.Артоболевский (1905-1977). Он является организатором советской школы теории механизмов и машин; им написаны многочисленные труды по структуре, кинематике и синтезу механизмов, динамике машин и теории машин-автоматов, а также учебники, получившие всеобщее признание.

Механизмы, входящие в состав машины, весьма разнообразны. С точки зрения их функционального назначения механизмы обычно делятся на следующие виды [2]:

- механизмы двигателей и преобразователей;
- передаточные механизмы;
- исполнительные механизмы;
- механизмы управления, контроля и регулирования;
- механизмы подачи, транспортировки, питания и сортировки обрабатываемых сред и объектов;
- механизмы автоматического счета, взвешивания и упаковки готовой продукции.

Механизмы двигателей осуществляют преобразование различных видов, энергии в механическую работу. *Механизмы преобразователей (генераторов)* осуществляют преобразование механической работы в другие виды энергии. К механизмам двигателей относятся механизмы двигателей внутреннего сгорания, паровых машин, электродвигателей, турбин и др. К механизмам преобразователей относятся механизмы насосов, компрессоров, гидроприводов и др.

Передаточные механизмы (привод) имеют своей задачей передачу движения от двигателя к технологической машине или исполнительным механизмам. Так как вал двигателя обычно имеет более высокую частоту вращения, чем основной вал технологической машины, задачей передаточных механизмов является уменьшение частоты вращения вала двигателя до уровня частоты вращения основного вала технологической машины.

Исполнительными механизмами называются те механизмы, которые непосредственно воздействуют на обрабатываемую среду или объект. В их задачу входит изменение формы, состояния, положения и свойств обрабатываемых среды или объекта. К исполнительным механизмам, например, относятся механизмы прессов, деформирующих обрабатываемый объект, механизмы грохотов в энергозерноочистительных машинах, разделяющих среду, состоящую из зерна и соломы, механизмы металлообрабатывающих станков, изменяющие форму заготовки снятием стружки до той

формы, которая требуется по технологическим условиям, механизмы проката слитков в блюмингах и т. д.

Механизмами управления, контроля и регулирования называются различные механизмы и устройства для контроля размеров обрабатываемых объектов, например механические щупы, следующие за фрезой, обрабатывающей криволинейную поверхность, и сигнализирующие об отклонении фрезы от заданной программы обработки; регуляторы, реагирующие на отклонение угловой скорости главного вала машины и устанавливающие нормальную заданную угловую скорость этого вала; механизм, регулирующий постоянство расстояния между валками прокатного стана и т. д. К этим же механизмам относятся и измерительные механизмы по контролю размеров, давления, уровней жидкостей и т. д.

К механизмам подачи, транспортировки, питания и сортировки обрабатываемых сред и объектов относятся механизмы винтовых шнеков, скребковых и ковшевых элеваторов для транспортировки и подачи сыпучих материалов, механизмы загрузочных бункеров для штучных заготовок, механизмы подачи пруткового материала в высадочных автоматах, механизмы сортировки готовой продукции по размерам, весу и конфигурации и т. д.

Механизмы автоматического счета, взвешивания и упаковки готовой продукции применяются во многих машинах, в основном выпускающих массовую штучную продукцию. Необходимо иметь в виду, что такие механизмы, как механизмы счета, взвешивания и упаковки готовой продукции, могут быть и исполнительными механизмами, если они входят в специальные машины, предназначенные для этих операций.

Так, например, в машинах для расфасовки чая механизмы взвешивания и упаковки являются исполнительными механизмами. В промышленности, изготавливающей шарикоподшипники, имеются специальные машины для упаковки собранных шарикоподшипников, в которых механизмы упаковки являются исполнительными механизмами, и т. д.

Несмотря на разницу в функциональном назначении механизмов отдельных видов, в их строении, кинематике и динамике много общего.

Например, механизм поршневого двигателя, механизм кривошипного пресса и механизм привода ножа косилки имеют в своей основе один и тот же кривошипно-ползунный механизм. Механизм привода резца строгального станка и механизм роторного насоса имеют в своей основе один и тот же кулисный механизм. Механизм редуктора, передающего движение от двигателя самолета к его винту, и механизм дифференциала автомобиля имеют в своей основе зубчатый механизм и т. д.

Поэтому можно к исследованию механизмов с различными функциональными назначениями применять общие методы, базирующиеся на основных принципах современной механики. В механике обычно рассматриваются статика, кинематика и динамика как абсолютно твердых, так и упругих тел. При исследовании машин и механизмов, как правило, мы можем считать жесткие тела, образующие механизм, абсолютно твердыми, так как перемещения, возникающие от упругих деформаций тел, малы по отношению к перемещениям самих тел и их точек. Если мы рассматриваем механизмы как устройства, в состав которых входят только твердые тела, то для исследования кинематики и динамики механизмов можно пользоваться мето-

дами, излагаемыми в теоретической механике. Если же требуется изучить кинематику и динамику механизмов с учетом упругости звеньев, то для этого, кроме методов теоретической механики, мы должны еще применять методы, излагаемые в сопротивлении материалов, теории упругости и теории колебаний. Если в состав механизма входят жидкие или газообразные тела, то необходимо привлекать к исследованию кинематики и динамики механизмов гидромеханику и аэромеханику.

Подробные сведения из истории развития техники представлены в п. 11.

¹Основное назначение - полная или частичная замена производственных функций человека с целью облегчения труда и повышения его производительности. Нередко термин «техника» применяют также для совокупной характеристики навыков и приемов, используемых в каком-либо деле или искусстве (например, техника игры на музыкальном инструменте и т. д.).

2. СТРУКТУРА МЕХАНИЗМОВ

Все механизмы независимо от особенностей их конструктивного и функционального назначения имеют общую *структурную основу*, для дальнейшего изучения которой рассмотрим следующие понятия и определения.

2.1. Звено механизма

Твердые тела, из которых образуется механизм, называют звеньями. При этом имеются в виду как абсолютно твердые, так и деформируемые и гибкие тела. Жидкости и газы в теории механизмов звеньями не считаются [1].

Абсолютно твердое тело - это такое тело, у которого расстояние между двумя любыми точками не изменяется при действии на него других тел. Иначе можно сказать, что абсолютно твердое тело не изменяет свою форму и размеры при любых взаимодействиях.

Абсолютно твердых тел в природе не существует, все реальные тела способны по-разному деформироваться под действием приложенных к ним сил. Таким образом, понятие абсолютно твердого тела является условным, или абстрактным.

Если пренебречь не только величиной деформации тела, но и его размерами и формой, тогда тело можно рассматривать как материальную точку, в которой сосредоточена вся масса.

Тело называется свободным, если никакие другие тела не препятствуют его перемещению в любом направлении, в противном случае тело называется несвободным или связанным. Пример свободного тела - воздушный шар в полете. Большинство окружающих нас тел является несвободными телами [9].

Звено - либо одна деталь, либо совокупность нескольких деталей, соединенных в одну кинематически неизменяемую систему, то есть звено может состоять из нескольких соединенных неподвижно друг с другом частей - деталей. Например, шатун двигателя внутреннего сгорания состоит лишь из тела шатуна, шатунной крышки, вкладышей, шпилек, шайб и гаек.

Деталью называют часть механизма или машины, изготавливаемую без применения сборочных операций.

Звенья различают по конструктивным признакам (коленчатый вал, зубчатое колесо, шатун, поршень и т. д.) и по характеру их движения. Например, звено, вра-

шающееся на полный оборот вокруг неподвижной оси, называют *кривошипом*, при неполном обороте - *коромыслом*; звено, совершающее поступательное движение, - *ползуном* и т. д.

Неподвижное звено механизма для краткости называют *стойкой*; понятие неподвижности стойки для механизмов транспортных машин, в частности, летательных аппаратов, - условное, поскольку в этом случае сама стойка движется.

В зависимости от назначения звенья механизма подразделяют на входные, выходные и соединительные.

Входным называют звено, которому сообщается преобразуемое движение. *Выходным* - звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм.

Обычно в механизме имеется один вход и один выход. Вход получает движение от двигателя, а выход соединяется с рабочим органом машины или указателем прибора. Но могут быть механизмы с несколькими входами и выходами.

В динамике механизмов применяют термины «ведущее» и «ведомое» звенья. *Ведущее* - звено, которому сообщают положительную работу, *ведомое* - звено, которому сообщают отрицательную работу приложенные к ним внешние силы. На ведущее звено силы действуют по направлению скорости, на ведомое - против направления скорости.

Одно и то же выходное звено на отдельных участках движения может быть то ведомым, то ведущим. Аналогично входное звено, которое по признаку действия сил обычно является ведущим, на некоторых участках движения может быть ведомым. Например, электродвигатель, соединенный с входным звеном, может в зависимости от соотношения сил, действующих на звенья механизма, работать как в двигательном, так и в генераторном режиме.

Остальные подвижные звенья называются соединительными или промежуточными.

2.2. Кинематические пары

Звенья соединяются между собой подвижно. В общем случае звено может образовывать подвижные соединения с несколькими звеньями, но для удобства изучения кинематических свойств этих соединений принято рассматривать соединения двух соприкасающихся звеньев. *Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев называется кинематической парой*. Кинематическую пару можно определить также как соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение.

Слово «пара» применено потому, что соединяются между собою два звена, а слово «кинематическая» - потому, что соединение подвижное, поскольку слова «кинематический» и «подвижный» означает одно и то же.

Рассчитаем, сколько простейших перемещений может сделать шар, ни с чем не связанный (рис. 2.1). Во-первых, центр масс шара может двигаться прямолинейно вдале любой из трех координатных осей. Он может двигаться и между осями, но ведь систему координат располагают произвольно, и ничто не мешает направить любую из координатных осей по касательной к траектории движения центра масс шара. Во-вторых, шар может вращаться вокруг любой из трех координатных осей. Таким образом, любое тело (а мы взяли шар потому, что так удобнее) может иметь

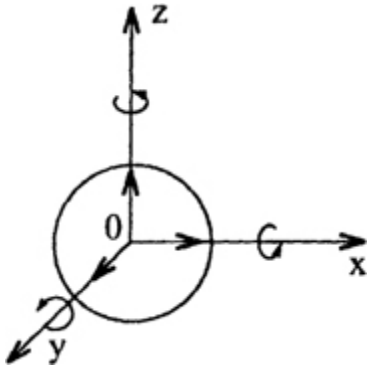


Рис. 2.1

шесть независимых возможных перемещений. Каждое независимое возможное перемещение тела называют степенью свободы. Полное число степеней свободы равно шести.

Рассмотрим наиболее распространенные кинематические пары. Если одно звено относительно другого может проворачиваться, то кинематическую пару называют вращательной или шарниром. К слову, все суставы нашего скелета - это шарниры (рис. 2.2., а).

Если же одно звено движется относительно другого звена только поступательно, то такую кинематическую пару называют поступательной или ползуном (рис. 2.2., е). Соединение поршня с цилиндром двигателя внутреннего сгорания - это типичный пример ползуна.

Шарнир и ползун - это простейшие кинематические пары.

Совокупность поверхностей, линий и точек звена, входящих в соприкосновение (контакт) с другим звеном пары, называют элементом пары. Для того чтобы элементы пары находились в постоянном соприкосновении, пара должна быть замкнута геометрическим (за счет конструктивной формы звеньев) или силовым (силой тяжести, пружиной, силой давления жидкости или газа и т. п.) способом.

Кинематические пары во многом определяют работоспособность и надежность машины, поскольку через них передаются усилия от одного звена к другому. В кинематических парах вследствие относительного движения возникает трение. Элементы пары находятся в напряженном состоянии и в процессе изнашивания. Поэтому правильный выбор вида кинематической пары, ее геометрической формы, размеров, конструкционных и смазочных материалов имеет большое значение при проектировании машин и механизмов.

Низшие и высшие пары. Кинематические пары различают еще и по характеру соприкосновения звеньев: пару называют низшей, если элементы звеньев соприкасаются только по поверхности, и высшей, если только по линиям или в точках. При этом линейный или точечный контакт понимается как первоначальный - при соприкосновении звеньев без усилия, - а под нагрузкой звенья, образующие высшую пару, будут соприкасаться по некоторой фактической поверхности, называемой пятном контакта.

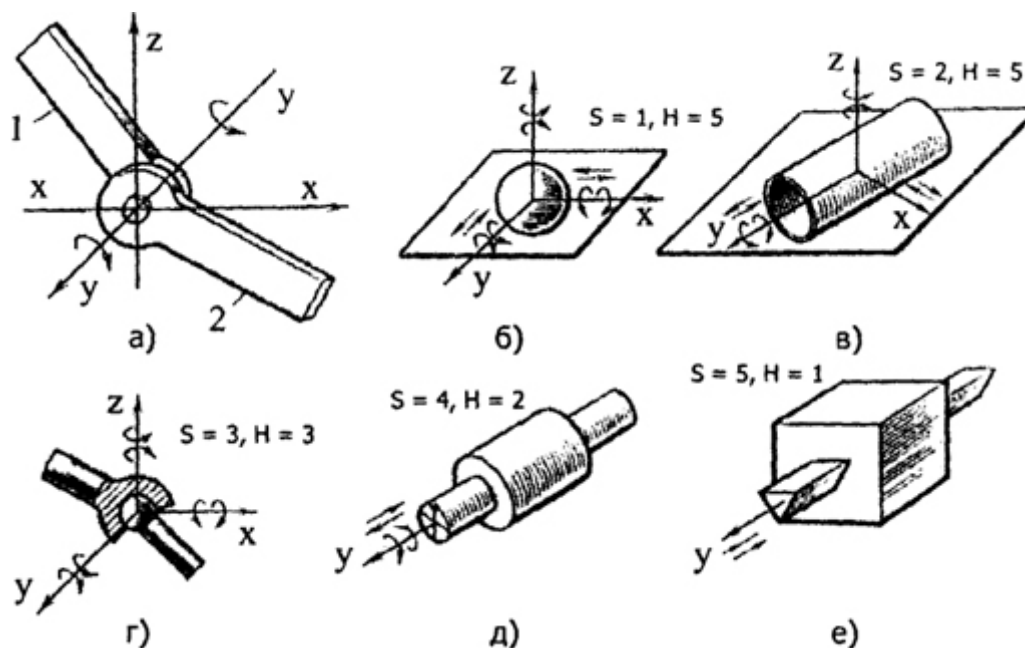


Рис. 2.2. Примеры высших и низших кинематических пар: а - низшая (вращательная); б - высшая (шар-плоскость); в - высшая (цилиндр-плоскость); г - низшая (сферическая); д - низшая (цилиндрическая); е - низшая (поступательная).

Примеры высших и низших кинематических пар представлены на рис. 2.2.

Одно из преимуществ низших кинематических пар по сравнению с высшими - возможность передачи больших сил, поскольку контактная поверхность соприкасающихся звеньев низшей пары может быть весьма значительна. Применение высших пар позволяет уменьшить трение в машинах (классический пример - шарикоподшипник) и получать нужные, самые разнообразные законы движения выходного звена механизма путем придания определенной формы звеньям, образующим высшую пару.

Кинематические пары классифицируют по числу H степеней свободы в относительном движении звеньев (подвижность пары) и по числу S условий связи (ограничений), накладываемых парой на движение одного звена относительно другого. При этом предполагается, что все связи - геометрические, налагающие ограничения только на координаты точек звена, входящего в кинематическую пару, в его относительном движении.

Так как для свободного тела в пространстве $H = 6$ (см. рис. 2.1.), то число степеней свободы (подвижности) одного из звеньев, образующих кинематическую пару, относительно другого звена можно определить по формуле

$$H = 6 - S \quad (2.1)$$

Класс кинематической пары. Из формулы (2.1) следует, что при $S = 0$, $H = 6$, т. е. происходит размыкание кинематической пары, а при $S = 6$, $H = 0$ - звенья теряют относительную подвижность. Следовательно, число связей, налагаемых кинематической парой, может быть от 1 до 5, т. е. $S = 1, 2, 3, 4$ или 5.

Согласно классификации академика И. И. Артоболевского [2], кинематические пары делят на пять классов (табл. 2.1.). Класс пары определяется числом S .

Различают *одноподвижные* пары (V класса, $H = 1$, $S = 5$), *двух-подвижные* (IV класса, $H = 2$, $S = 4$), *трехподвижные* (III класса, $H = 3$, $S = 3$), *четыреподвижные*

(II класса, $H = 4, S = 2$) и *пятипод-вижные* (I класса, $H = 5, S = 1$). В таблице 2.1 даны примеры кинематических пар с их условными обозначениями [10].

Табл. 2.1. Классификация кинематических пар

Кинематическая пара и ее условное обозначение	Шар-плоскость	Цилиндр-плоскость	Сферическая	Цилиндрическая	Поступательная
Число степеней свободы/ класс пары	5/1	4/2	3/3	2/4	1/5

Наиболее распространенными являются *одноподвижные* пары, которые представлены в трех вариантах. В поступательной паре относительное движение ее звеньев прямолинейно-поступательное, во вращательной паре - вращательное, в винтовой - винтовое.

Двухподвижные кинематические пары представлены в двух вариантах: цилиндрическая пара и сферическая пара с пальцем. Независимым возможным перемещениям в двухподвижной сферической паре соответствуют поворот вокруг оси пальца и поворот относительно оси, перпендикулярной плоскости кольцевого паза и проходящей через центр сферы.

Трехподвижные кинематические пары также представлены в двух вариантах: сферическая пара (шаровой шарнир) и плоскостная пара. *Четырех- и пятиподвижные* пары представлены вариантами: «цилиндр - плоскость» и «шар - плоскость», В общем случае четырехподвижная пара получается при линейном касании двух поверхностей, а пятиподвижная - при точечном.

Кроме числа степеней свободы в относительном движении звеньев в таблице указано также число связей в предположении, что все связи - геометрические, т. е. налагают ограничения только на положения (координаты) точек звеньев. Сумма числа степеней свободы и числа связей всегда равна 6, т. е. числу степеней свободы твердого тела, движущегося в пространстве.

К низшим парам принадлежат: поступательная, вращательная, винтовая, цилиндрическая, сферическая и плоскостная.

Для решения вопроса, к какому классу относится та или иная кинематическая пара, следует поступать так. Одно из звеньев, входящих в кинематическую пару, представить неподвижным. Связать с ним систему координат Охуz и, ориентируясь по ней, проследить, какие движения другого звена пары невозможны из шести движений, которое оно имело бы возможность совершить, не входя в пару. Число этих невозможных движений (как равное числу связей в паре) представит собою номер класса пары.

Последовательность определения класса кинематической пары рассмотрим на примере. На рис. 2.3. изображена низшая (поступательная) кинематическая пара.

Элементом кинематической пары является поверхность, по которой звено 2 охватывает звено 1. Необходимо определить класс кинематической пары.

Сделаем звено 1 неподвижным. Проведем через центр O прямоугольную систему координат $Oxyz$, связанную со звеном 1. Звено

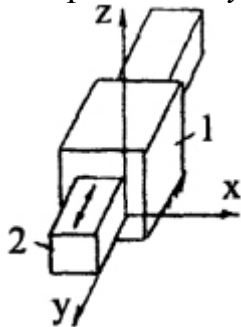


Рис. 2.3. Поступательная кинематическая пара

2 не может перемещаться вдоль осей Ox и Oz и не может вращаться вокруг этих же осей и оси Oy . Следовательно, эту кинематическую пару надо отнести к пятому классу (невозможны пять из шести движений) [3].

2.3. Кинематические цепи

Систему звеньев, связанных между собой кинематическими парами, называют кинематической цепью.

Если звенья совершают движение в одной плоскости или в параллельных плоскостях, кинематическая цепь будет *плоской*, в противном случае - *пространственной*.

Кинематическая цепь, каждое звено которой входит не более чем в две кинематические пары, называется простой (рис. 2.4., б, в);

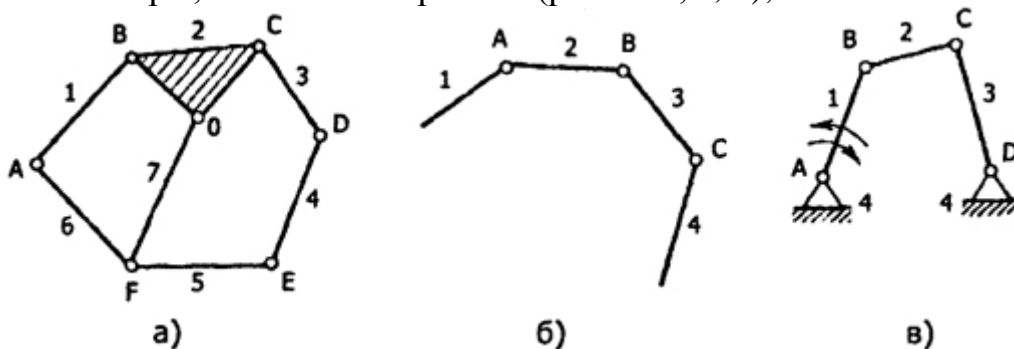


Рис. 2.4. Кинематические цепи. а - замкнутая кинематическая цепь; б - разомкнутая кинематическая цепь; в - шарнирный четырехзвенный механизм (замкнутая кинематическая цепь)

если звенья входят более чем в две кинематические пары, то цепь называют сложной (рис. 2.4., а, звено 2) [10].

Открытой называют кинематическую цепь, в которой есть звено, входящее только в одну кинематическую пару (рис. 2.4, б, звенья 1 и 4), и *замкнутой*, в которой такого звена нет (рис. 2.4, а, в). Звено 2 (рис. 2.4, а) называют *базисным*.

2.4. Схемы механизмов

Так же, как при решении большинства инженерных задач, при исследовании механизмов изображение объекта исследования упрощают (схематизируют)

настолько, что оно становится условным. Наиболее наглядное представление о структуре механизма дает его *структурная схема*, под которой понимают изображение всей совокупности составляющих элементов, определяющих функции механизма (рис. 2.5, а). Для выполнения кинематических схем применяют условные графические изображения (см. таблицу 2.1), установленные Единой системой конструкторской документации (ЕСКД). Схему чертят без масштаба, обычно в виде развертки на плоскость, реже - в аксонометрии. Звенья обозначают арабскими цифрами, кинематические пары - большими буквами латинского алфавита, стойку - штриховкой (рис. 2.5, д).

Изобразим кинематическую схему двигателя внутреннего сгорания, упрощенная конструкция которого показана на рис. 2.5, а. Ведущим звеном в этом случае является поршень 2, движению которому сообщает внешняя сила - сила давления газа. Поршень совершает возвратно-поступательное движение относительно стенок неподвижного цилиндра 1, а ведомое звено (вал 5 с кривошипом 4) - вращательное движение. Между ведущим и ведомым звеньями находится промежуточное звено - шатун 3, совершающий сложное движение [4].

С кинематической точки зрения конкретный конструктивный элемент - поршень - можно обобщенно назвать ползуном. Вместе со стенками цилиндра, являющимися направляющими, ползун образует поступательную кинематическую пару, которая условно изображается

так, как показано на рис. 2.5, б. Вал с кривошипом, совершающие вращательные движения относительно неподвижной опоры, образуют вращательную кинематическую пару *A*, схематическое изображение которой показано на рис. 2.4, в. шатун - это стержень, один конец которого шарнирно связан с поршнем (пара *C*), а другой через пару *B* с кривошипом (рис. 2.5, з).

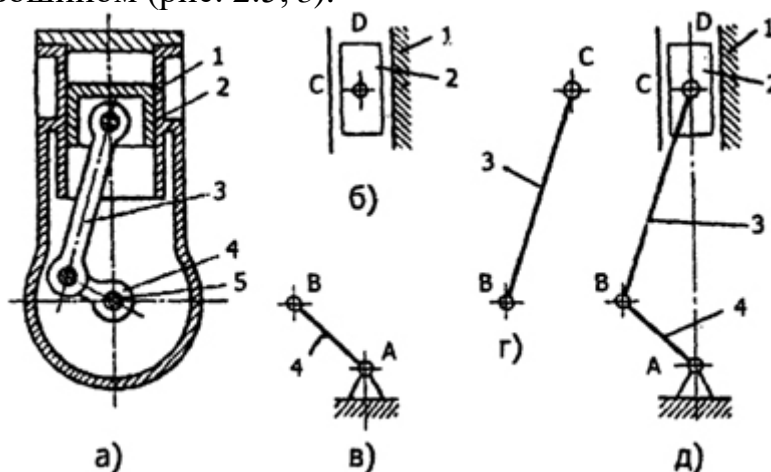


Рис. 2.5. Этапы построения кинематической схемы двигателя внутреннего сгорания

Объединив отдельные изображения кинематических пар и звеньев в единое целое, получим кинематическую схему механизма двигателя (рис. 2.5, д), в котором три звена (ползун, шатун и кривошип) являются подвижными и одно - неподвижным, образованным стенками цилиндра и неподвижной опорой вала (являясь самостоятельными конструктивными элементами механизма, они едины в кинематическом отношении). Кинематических пар в этом механизме четыре - три вращательные (*A*, *B*, *C*) и одна поступательная (*D*).

Для кинематического исследования механизма применяют кинематическую схему.

Кинематическая система - графическое изображение механизма посредством условных обозначений звеньев и кинематических пар с указанием размеров, необходимых для кинематического анализа механизма.

Кинематическая схема выполняется в масштабе μ_l .

$$\mu_l = \frac{L_{BC}}{l_{BC}} = \frac{м}{мм}, \quad (2.2)$$

где L_{BC} - длина звена BC механизма, выраженная в метрах,

l_{BC} - длина звена BC механизма на кинематической схеме в миллиметрах.

На рис. 2.5 показаны конструктивная (а) и кинематическая (б) схемы механизма шарнирного четырехзвенника. Из схемы (д) наглядно видно, что звенья 2,3,4 подвижны относительно стойки 1.

Элементы высших пар на кинематических схемах очерчиваются кривыми, которыми они характеризуются в натуре (пара В на рис. 2.6, а).

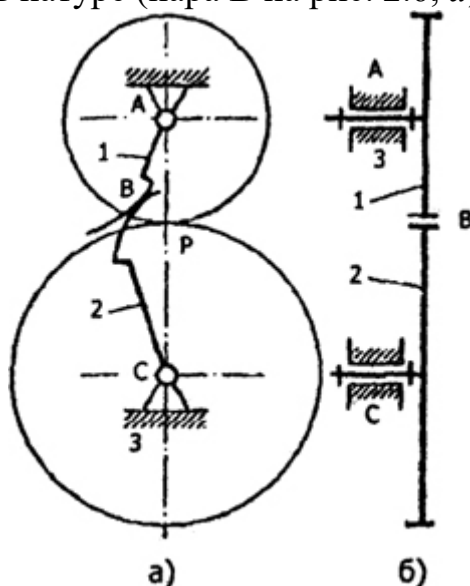


Рис. 2.6. Схематическое изображение зубчатой передачи: а) схема вычерчена на плоскости, параллельной движению точек звеньев механизма, б) схема вычерчена на плоскости, перпендикулярной плоскости вращения звеньев механизма.

3. МЕХАНИЗМЫ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Из определений кинематической цепи и механизма следует, что они представляют собой совокупность звеньев и кинематических пар. Поэтому при соблюдении определенных условий кинематическая цепь может стать механизмом. Анализ показывает, что звенья кинематической цепи обладают определенностью движения только при наличии неподвижного звена (стойки). Таким образом, наличие неподвижного звена является обязательным условием существования механизма. Все механизмы разделяют на две группы: механизмы с высшими кинематическими парами и механизмы с низшими кинематическими парами. К наиболее распространенным видам механизмов с высшими парами относятся зубчатые, кулачковые, фрикционные и мальтийские механизмы, а также механизмы с гибкими связями.

Механизм, звенья которого соединены с помощью низших кинематических пар, называют стержневым или рычажным.

Степень подвижности механизма. Свойства механизмов во многом определяются видом и расположением подвижных соединений звеньев - кинематических пар. Если входное звено одно, т. е. преобразуется движение одного двигателя, то механизм обладает одной степенью свободы. Используют и более сложные механизмы, которые приводятся в движение несколькими двигателями.

Число W независимых движений, которые нужно задать входным звеньям механизма, чтобы все его остальные звенья двигались относительно стойки вполне определенно, называют числом степеней свободы или степенью свободы механизма.

Для плоских механизмов степень свободы может быть определена исходя из следующих соображений. Механизм состоит из k звеньев, одно из которых - стойка. Как известно, $k - 1 = n$ подвижных звеньев, будучи не связанными (до соединения в кинематические пары) имели бы каждое по три ($W = 3$) степени свободы. Но все звенья механизма соединены между собой в пары V и IV классов, которые налагают ограничения на относительные движения этих звеньев. Заметим, что в плоском механизме все степени

свободы кинематических пар выше IV класса (I, II, III) не могут быть реализованы (см. табл. 2.1).

Если обозначить: p_5 - число кинематических пар V класса, каждая из которых накладывает в плоскости по две связи, p_4 - число пар IV класса, которые накладывают одну связь, то оставшееся число степеней свободы механизма подсчитывается по формуле

$$W = 3(k - 1) - 2p_5 - p_4 = 3n - 2p_5 - p_4 \quad (3.1)$$

Структурная формула механизма (3.1) впервые была предложена акад. П. Л. Чебышевым в 1869г. Позднее аналогичная зависимость получена проф. П.О.Сомовым (1887) и А.П.Малышевым (1923) и для пространственных кинематических цепей общего вида:

$$W = 6(k - 1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 6(k - 1) - \sum_{s=1}^5 Sp_s, \quad (3.2)$$

где k - число звеньев механизма (включая стойку); S - число условий связи, налагаемых кинематической парой на относительное движение звеньев (оно соответствует классу пары); p_s - число пар данного класса ($S = 1, 2, \dots, 5$; см. табл. 2.1).

$$k = n + 1 \quad (3.3)$$

Применение формулы для определения степени свободы плоского механизма рассмотрим на примере шарнирного четырехзвенника (рис. 2.5, д). Он состоит из подвижных звеньев 2, 3, 4 ($n = 3$) и стойки 1 ($k = n + 1 = 4$). Звенья соединены кинематическими парами A, B, C и D ($p_5 = 4$). Высшие пары в механизме отсутствуют ($p_4 = 0$). Степень свободы этого механизма $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1$.

Это означает, что для данного механизма нужно задать только одно движение, чтобы другие его звенья двигались вполне определенным образом, т. е. этот механизм должен иметь только одно входное звено. В нашем примере это ползун 2.

Число степеней свободы механизма может быть любым целым числом (в отличие от степени свободы твердого тела, которая не может быть больше шести). Среди существующих механизмов

наибольшее число степеней свободы имеют механизмы роботов: $W_{\max} = 8 \dots 10$.

Пассивные связи и «лишние» степени свободы. Если при расчетах по формулам (3.1) или (3.2) получено $W < 0$, то это означает, что данная система соединенных звеньев жесткая, т. е. двигаться относительно стойки не может. Но если при полученном $W < 0$ система (механизм) все же движется, то это свидетельствует о наличии в ней пассивных связей, которые не ограничивают движения ведомых звеньев. Их вводят в состав механизма для повышения его жесткости или устранения неопределенности движения звеньев в некоторых положениях.

Кроме наличия пассивных связей, нужно учитывать, что не все возможные относительные движения звеньев влияют на основное движение выходного звена. Эту несущественную степень свободы называют «лишней». Рассмотрим два примера [3].

На рис. 3.1 и 3.2 показаны два механизма, которые надо отнести к плоским, так как на движения их звеньев наложены по три общих условия связи: звенья не могут перемещаться поступательно вдоль оси Ox и вращаться вокруг осей Oy и Oz . Следовательно, оба эти механизма принадлежат к третьему семейству.

В механизме на рис. 3.1 длины звеньев (расстояния между осями шарниров) подобраны так, что изменяемая фигура $ABCD$

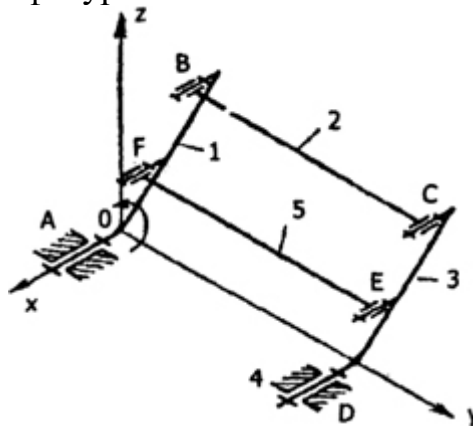


Рис. 3.1. Плоский шарнирный параллелограмм

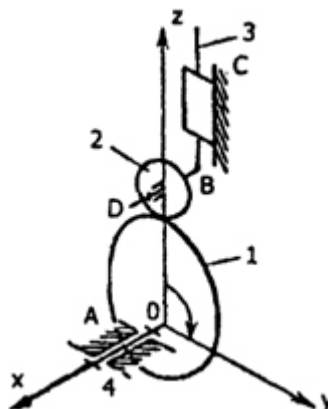


Рис. 3.2. Плоский кулачковый механизм

всегда будет параллелограммом ($l_{AB} = l_{CD}$, $l_{BC} = l_{AD}$). Вследствие того, что $l_{AF} = l_{ED}$ и $l_{EF} = l_{AD}$, звено 5 не стесняет движения остальных звеньев. Поэтому оно должно быть отнесено к пассивной связи и не учитываться при подсчете числа подвижных звеньев и. При отброшенном звене 5 степень подвижности механизма по формуле (3.1) равна

Это означает, что для придания определенности движения звеньям механизма достаточно задать движение одному звену.

Если бы не была отброшена пассивная связь (звено 5 и кинематические пары пятого класса F и E), то при подсчете степени подвижности был бы получен неверный результат, так как в этом случае степень подвижности W была бы равна

$$W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

т. е. вместо механизма должна бы быть жесткая неизменяемая система, являющаяся фермой.

На рис. 3.2 представлен плоский кулачковый механизм, у которого на конце толкателя 3 имеется круглый ролик 2, поворачивающийся вокруг своей оси. Если ролик жестко связать с толкателем, то от этого закон движения толкателя, очевидно, не изменится. Круглый ролик, свободно поворачивающийся вокруг своей оси, вносит в механизм *лишнюю степень свободы*, и при подсчете степени подвижности механизма это вращательное движение приниматься во внимание не должно. Считая, что ролик жестко связан с толкателем, подсчитаем степень подвижности механизма по формуле (3.1):

$$W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0,$$

Формальный же подсчет привел бы нас к такому результату:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

В современном машиностроении особенно широкое применение получили плоские механизмы, звенья которых входят в пары IV и V классов. Основной принцип их образования был впервые сформулирован в 1914г. русским ученым Л. В. Ассуром и впоследствии развит И. И. Артоболевским [2].

Согласно идеям Л. В. Ассура, любой механизм образуется последовательным присоединением к *начальному механизму* (ведущему звену, соединенному со стойкой вращательной или поступательной парами) структурной группы (группы Ассура).

3.1. Начальные механизмы

Начальные механизмы бывают двух видов: вращательный и поступательный. Они относятся к механизмам I класса (рис. 3.3.). Степень подвижности таких механизмов равна единице:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 0 = 1.$$

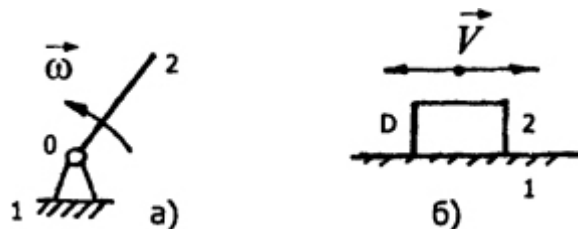


Рис. 3.3. Виды начальных механизмов в плоском механизме: а - вращательный, б - поступательный

3.2. Группы Ассура

Группой Ассура называется кинематическая цепь с нулевой степенью подвижности относительно тех звеньев, с которыми входят в кинематические пары свободные элементы ее звеньев, и не распадающаяся на более простые цепи, обладающие также нулевой степенью подвижности.

Следовательно, степень подвижности группы Ассура будет

где n_2 - число звеньев в группе, p_{52} - число кинематических пар V класса.

Из условия (3.4) получим, что p_{52} равно

$$W = 3n_2 - 2p_{52} = 0, \quad (3.4)$$

Так как число кинематических пар V класса p_{52} и число звеньев n_2 должны быть целыми числами, то, следовательно, число звеньев в группе Ассура (n_2) - всегда четное число, а число кинематических пар V класса (p_{52}) кратно трем.

Согласно соотношению (3.5) в группах Ассура могут быть следующие числа звеньев и кинематических пар V класса:

$$p_{52} = \frac{3n_2}{2} \quad (3.5)$$

Группы Ассура подразделяются на классы в зависимости от их строения.

n_2	2	4	6
p_{52}	3	6	9

(3.6)

Первый столбец таблицы (3.6) относится к группам Ассура второго класса следующих пяти видов (рис. 3.4) [3]:

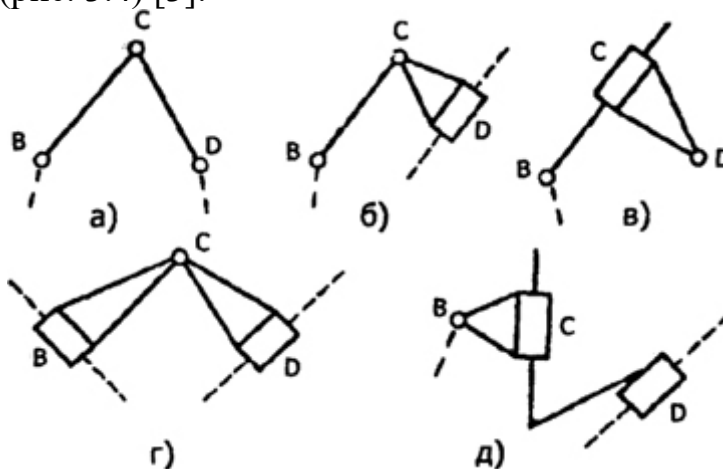


Рис. 3.4. Группы Асура второго класса различных видов: а - первого, б - второго, в - третьего, г - четвертого, д - пятого

В группах Ассура различают кинематические пары *внутренние* (кинематическая пара C) и *внешние* (кинематические пары B и D на рис. 3.4). Число внешних кинематических пар

матических пар или, точнее, их элементов, которыми группа присоединяется к другим звеньям механизма (например, к ведущему звену и стойке), называют *порядком группы*. Все группы второго класса являются группами второго порядка.

Второй столбец таблицы (3.6) позволяет образовать три варианта кинематических цепей, формально удовлетворяющих условию (3.5) (рис. 3.5).

Кинематическая цепь, показанная на рис. 3.5, а, не является группой: она распадается на две группы Ассура *второго класса* BCD и EFG .

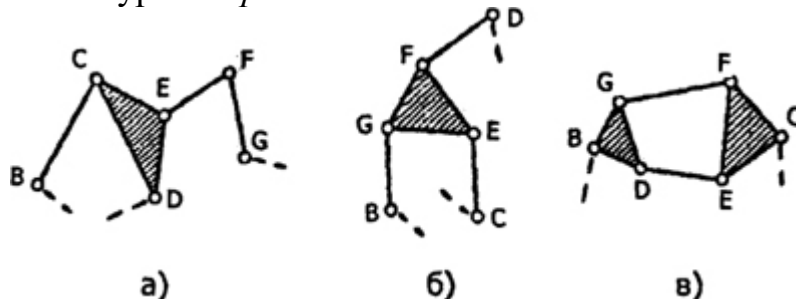


Рис. 3.5. Три варианта кинематических цепей: а - две группы Асура второго класса, б - группа третьего класса, в - группа четвертого класса

Кинематическая цепь, показанная на рис. 3.5, б, образует группу Ассура третьего класса *третьего* порядка. В этой группе кинематические пары B, C, D будут внешними, а пары E, F, Q - внутренними.

Кинематическая цепь, изображенная на рис. 3.5, в, называется группой Ассура *четвертого* класса второго порядка. В этой группе кинематические пары B и C будут внешними, а пары D, E, F, G - внутренними.

Класс группы Ассура выше второго определяется числом внутренних кинематических пар, образующих так называемый исходный контур.



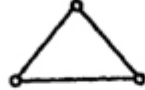
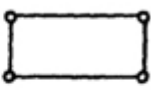

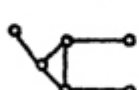
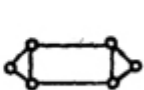
Группы Ассура третьего и более высоких классов по видам не различаются.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1. Любой рычажный механизм состоит из начального механизма и присоединенных к нему групп Ассура.
2. Группа Ассура - это кинематическая цепь, не обладающая степенями свободы и не распадающаяся на более простые подобные цепи.
3. Класс группы Ассура характеризуется количеством кинематических пар в замкнутом контуре, входящем в состав группы, а ее порядок определяется количеством внешних кинематических пар, которыми она присоединяется к основному механизму (см. табл. 3.1) [10].

Таблица 3.1

Классификация групп Ассура

Характеристика	Контур			
				
Класс контура	1	2	3	4
Группа Ассура	—			
Класс группы	—	2	3	4
Порядок группы	—	2	3	4

4. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА

Структурный анализ механизма состоит в определении его класса и выполняется в следующей последовательности:

1. Вычерчивается структурная схема механизма.
2. Определяется степень подвижности механизма W . Звенья, образующие пассивные связи и вносящие лишние степени свободы при подсчете W , не учитываются. При наличии в механизме пар IV класса строится заменяющий механизм.
3. Выбирается начальный механизм (если $W = 1$) или начальные механизмы ($W > 1$).
4. Производится отделение групп Ассура.
5. Записывается структурная формула механизма и указывается его класс.

Класс механизма соответствует наивысшему классу группы Ассура, которая входит в его состав. Следует иметь в виду, что изменением ведущего звена можно либо повысить, либо понизить класс механизма. Поэтому при всех прочих равных условиях класс механизма зависит и от выбора ведущего звена. Кинематический и силовой анализы механизма усложняются с повышением класса механизма, следовательно, всегда надо стремиться выбирать ведущее звено так, чтобы класс механизма оказался наинизшим из всех возможных для данной кинематической схемы механизма.

Рассмотрим выполнение структурного анализа на примере механизма конхоидаграфа (рис. 4.1).

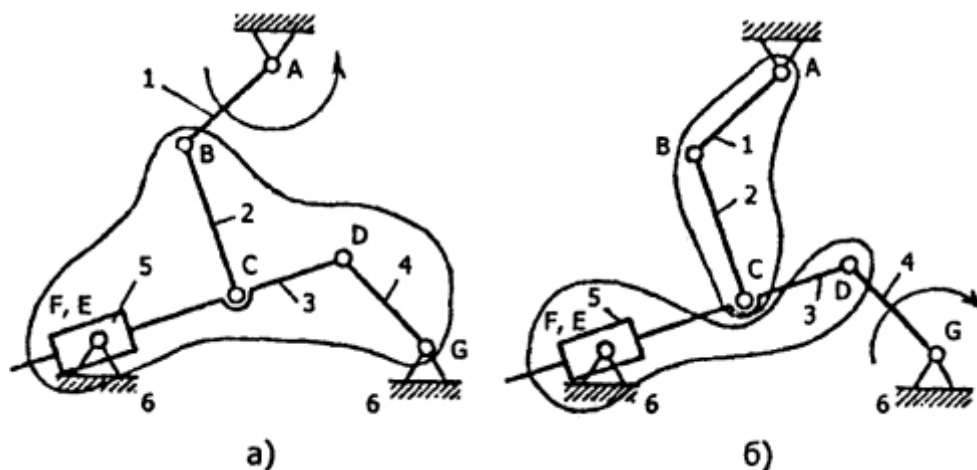


Рис. 4.1. Механизм конхоидографа: а - ведущее звено первое, б - ведущее звено четвертое

Решение. 1. Определяется степень подвижности механизма по формуле Чебышева. Так как $k = 6$, $n = 5$, $p_5 = 7$, $p_4 = 0$, то, следовательно,

$$W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$$

2. Так как $W = 1$, то в таком механизме должно быть одно ведущее звено (один начальный механизм). Рассмотрим 2 варианта анализа:

а - ведущее звено 1 (рис. 4.1, а);

б - ведущее звено 4 (рис. 4.1, б).

3. Выделим начальные механизмы (вращательные) и разложим оставшуюся кинематическую цепь на группы Ассур. По первому варианту (ведущее звено 1) от механизма можно отделить только кинематическую цепь, состоящую из звеньев 2, 3, 4 и 5. Эта цепь представляет собой группу Ассур третьего класса третьего порядка, так как в ней три внутренние кинематические пары (вращательные пары D , C и поступательная E) и три внешние (вращательные пары B, G и F). По второму варианту (рис. 4.1, б) от механизма последовательно отделяются группы Ассур второго класса, состоящие из звеньев 1 и 2, 3 и 5.

4. Формула строения механизма запишется так:

При ведущем звене 1 $I_{(1)} \rightarrow III_{(2,3,4,5)}$. Механизм третьего класса.

При ведущем звене 4 $I_{(4)} \rightarrow II_{(3,5)} \rightarrow III_{(2,1)}$. Механизм второго класса.

В этой формуле римские цифры I, II, III обозначают соответственно начальный механизм I класса и присоединяемые структурные группы II и III классов. Индексы при римских цифрах указывают, какие звенья образовали начальный механизм и присоединяемые группы.

5. СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

Структурным синтезом механизма называется проектирование структурной схемы механизма. Структурный синтез - это процесс, обратный анализу, при котором структурные схемы механизмов образуются присоединением к начальному механизму групп Ассур. При образовании механизмов группы Ассур можно соединять как параллельно, так и последовательно. Принцип синтеза покажем на примере образования плоского шестизвенного шарнирного механизма (рис. 5.1).

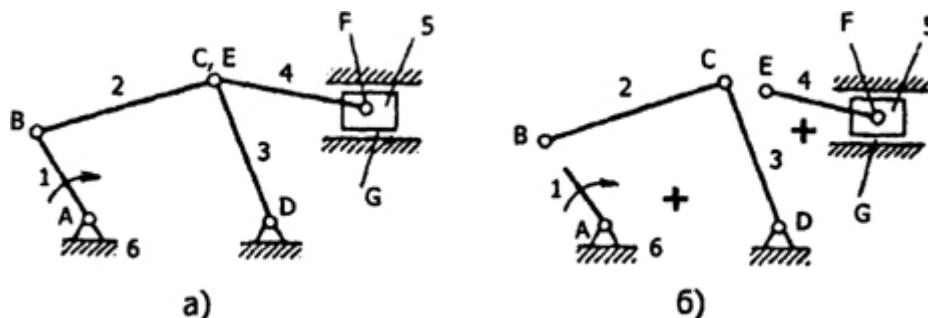


Рис. 5.1. Структурный синтез шарнирного шестизвенника

В механизме с одной степенью свободы положения всех звеньев определяются заданием одной обобщенной координаты или, что то же самое, положением одного начального звена. На рис. 5.1, б показано начальное звено 1, которое входит во вращательную пару со стойкой 6. Число степеней свободы W этого звена относительно стойки равно 1. Механизм в целом тоже должен иметь $W=1$. Поэтому мы можем присоединять (наслаивать) только такие кинематические цепи, которые относительно элементов ее внешних пар имеют $W=0$ (2 - 3, 4 - 5) [7].

Контрольные вопросы

1. Какое тело называется абсолютно твердым?
2. В чем отличие свободного и несвободного тела?
3. Какое движение называется механическим?
4. Дайте определение понятий «техника», «машина», «механизм», «звено», «кинематическая пара».
5. Какие звенья называют ведущими и ведомыми?
6. В чем отличие входного и выходного звеньев?
7. Что называется деталью?
8. На какие классы делятся машины?
9. По каким признакам классифицируют кинематические пары?
10. В чем отличие высшей и низшей кинематических пар?
11. Какие бывают кинематические цепи?
12. Как условно обозначают на схемах звенья и кинематические пары?
13. Как вычисляется масштаб кинематической схемы?
14. Каковы условия замены высших кинематических пар?
15. Какой механизм называют заменяющим?
16. Как определить степень подвижности плоского механизма?
17. Что называется группой Ассура?
18. Как определить класс и порядок группы Ассура?
19. Каковы виды начальных механизмов?
20. К какому классу относят начальные механизмы?
21. От чего зависит класс механизма?
22. Как записывается структурная формула механизма?
23. Какова последовательность структурного анализа?
24. Что называется структурным синтезом механизма?
25. С какой целью в состав механизма вводят пассивные связи?

6. ОСНОВЫ СТАТИКИ

6.1. Основные определения и задачи статики

Для понимания сущности любого механизма или машины решающим является то, в каком они находятся состоянии. Этих состояний может быть два: статическое и динамическое. Это два коренных понятия в технике, нечеткое усвоение которых нередко не дает возможности понять весь принцип действия машин.

Статическое состояние машины имеет место при неподвижности составных ее частей относительно друг друга. В таком состоянии, или, как говорят, «в статике», машина существует, но бездействует. **Статика** (от греческого слова *statos* - стоящий) изучает условия равновесия механических систем под действием сил. Это самый древний раздел механики с точки зрения ее исторического развития, т. к. статика обслуживала прежде всего строительную технику, которая стала развиваться очень рано.

Под равновесием мы понимаем покой или равномерное и прямолинейное движение тела относительно условно неподвижной системы отсчета. Такой системой отсчета при изучении механики применяют Землю.

Основные задачи статики. Таких задач две: 1) определение условий равновесия твердого тела под действием различных систем сил; 2) преобразование систем сил, действующих на твердое

тело, в системы им эквивалентные, в частности, приведение данной системы сил к более простой, оказывающей то же воздействие на движение тела, что и исходная система сил.

6.2. Система сил. Классификация сил

Одним из основных понятий механики является сила. Мы живем в материальном мире и нас окружают материальные тела, которые находятся во взаимодействии друг с другом. Это взаимное влияние проявляется в виде сил. Можно сказать, что **сила** - это мера механического взаимодействия тел [8, 9, 11, 12].

Сила характеризуется тремя элементами: 1) числовым значением (модулем); 2) направлением движения; 3) точкой приложения. Таким образом, *сила* - величина векторная. Числовое значение силы называется *модулем вектора силы*. *Направление силы* есть направление того движения, которое получила бы покоящаяся свободная материальная точка под действием этой силы. Прямая линия, по которой направлен вектор силы, называется *линией действия силы*.



Рис. 6.1. Графическое изображение силы

Вектор силы изображают в виде отрезка прямой со стрелкой на конце. Длина этого отрезка в масштабе характеризует модуль силы, а стрелка - ее направление.

Начало вектора совмещено с точкой приложения силы (рис. 6.1). Обозначают вектор одной буквой, например, F или \vec{F} . →Модуль силы обозначают той же буквой F . Возможно использование и других букв латинского алфавита (P, Q, R, N и т.д.).

Как известно из физики, Международная система единиц (СИ) в качестве единицы силы устанавливает Ньютон (Н). *Ньютон есть сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение 1 м/с² в направлении действия силы.* Масштаб силы показывает, сколько единиц модуля силы содержится в единице длины ее вектора. Единица масштаба силы $\mu_F = \text{Н/мм}$.

На любое тело обычно действуют несколько сил. Например, на автомобиль, стоящий на шоссе, действуют следующие силы: сила притяжения Земли; сила противодействия (реакция) грунта; сила давления ветра; центробежная сила, возникающая из-за совместного вращения автомобиля с Землей. Если автомобиль стоит на уклоне, то возникает и сила трения.

Совокупность сил, одновременно действующих на тело, называют системой сил.

Различают *уравновешенные* и *неуравновешенные* системы сил.

Уравновешенной называют такую систему сил, которая не нарушает равновесия тела. В уравновешенной системе силы взаимно уравновешиваются, поэтому их равнодействующая равна нулю.

Неуравновешенная система сил, будучи приложена к абсолютно твердому телу, заставляет его двигаться. Нахождение равнодействующей неуравновешенной системы сил называют *сложением сил*, а обратное действие – *разложением*. Силы, входящие в состав системы, называют составляющими силами.

Если линии действия всех сил системы лежат в разных плоскостях, то систему называют *пространственной*. Если же линии действия всех сил системы расположены в одной плоскости, то систему называют *плоской*.

В общем случае линии действия сил пространственной или плоской системы располагаются произвольно. В частных случаях линии действия сил могут пересекаться в одной точке либо быть параллельными друг другу. В этом случае различают *системы сходящихся сил* и *системы параллельных сил*.

Если в результате непосредственного контакта тел происходит их деформация – можно говорить о *статическом* действии сил.

При динамическом действии сил тело стремится изменить свою скорость. Силы, стремящиеся вызвать перемещение тела, увеличить его скорость, называют *активными* (силы тяжести, давления, ветра, мускульная сила человека и т. д.). Силы, препятствующие перемещению тела, тормозящие его, называют *реактивными* (силы трения между колесами автомобиля и дорогой, силы сопротивления воздуха при движении самолета и др.).

Передача воздействия одного тела на другое может происходить в одной точке, вдоль некоторой линии, по некоторой площади либо по всему объему. Силы, приложенные к абсолютно твердому телу в одной точке, называют *сосредоточенными*, а силы, действующие вдоль линии (давление цилиндра на плиту), по поверхности либо по объему, называют *распределенными*.

Рассмотрим некоторые простейшие примеры распределенных сил, лежащих в одной плоскости [10].

Плоская система распределенных сил характеризуется ее *интенсивностью* q , т. е. значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка. Измеряется интенсивность в ньютонах, деленных на метры (Н/м).

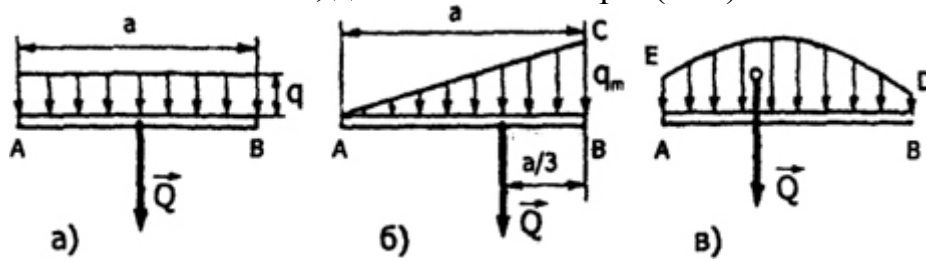


Рис. 6.2. Распределенные силы

Различают следующие виды распределенных сил:

1. Силы, равномерно распределенные вдоль отрезка прямой

(рис. 6.2, а). Для такой системы сил интенсивность q имеет постоянное значение. При статических расчетах эту систему сил можно заменить равнодействующей $Q \rightarrow$.

По модулю

$$Q = aq. \quad (6.1)$$

Приложена сила $Q \rightarrow$ в середине отрезка AB .

2. Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по линейному закону (рис. 6.2, б). Примером такой нагрузки могут служить силы давления воды на плотину, имеющие наибольшее значение у дна и падающие до нуля у поверхности воды. Для этих сил интенсивность q является величиной переменной, растущей от нуля до максимального значения q_m . Равнодействующая $Q \rightarrow$ таких сил определяется аналогично равнодействующей сил тяжести, действующих на однородную треугольную пластину ABC . Так как вес однородной пластины пропорционален ее площади, то по модулю

$$Q = 0,5aq_m. \quad (6.2)$$

Приложена сила $Q \rightarrow$ на расстоянии $a/3$ от стороны BC треугольника ABC .

3. Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по произвольному закону (рис. 6.2, в). Равнодействующая $Q \rightarrow$ таких сил, по аналогии с силой тяжести, по модулю равна площади фигуры $ABDE$, измеренной в соответствующем масштабе, и проходит через центр тяжести этой площади

6.3. Аксиомы статики

В основе статики лежат некоторые простые положения, не требующие доказательств, - это аксиомы. Они возникли в результате опытов и наблюдений за поведением тел, находящихся в равновесии под действием сил, и сформулированы Ньютоном. Рассмотрим эти аксиомы.

Аксиома I (аксиома инерции или первый закон Ньютона).

Всякое тело сохраняет свое состояние покоя или прямолинейного равномерного движения, пока какие-либо силы не выведут его из этого состояния.

Способность материального тела сохранять движение при отсутствии действующих сил или в постепенном изменении этого

движения, когда на тело начинают действовать силы, называется *инерцией* или *инертностью*. Инертность есть одно из основных свойств материи.

На основании этой аксиомы *состоянием равновесия* считаем такое состояние, когда тело находится в покое или движется прямолинейно и равномерно, т. е. по инерции.

Аксиома II (аксиома о двух силах). Для равновесия двух сил, приложенных к абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю, действовали по одной прямой и направлены в противоположные стороны (рис. 6.3). Такие силы называют взаимно уравновешенными:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, F_1 = F_2.$$

Аксиома III (аксиома присоединения). Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней добавить (отнять) совокупность (систему) уравновешенных сил.

Рассмотрим твердое тело (рис. 6.4), находящееся под действием системы сил $F \rightarrow_1, F \rightarrow_2, F \rightarrow_3, \dots, F \rightarrow_n$, прибавим еще две силы $F \rightarrow_{n+1}$ и $F \rightarrow_{n+2}$, которые являются взаимно уравновешенными. Очевидно, что получилась новая система, эквивалентная данной.

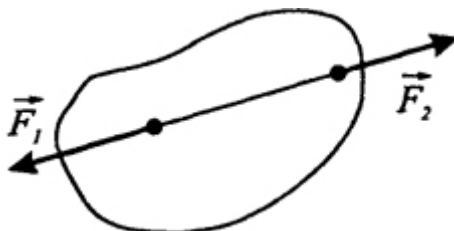


Рис. 6.3. Равные и противоположно направленные силы

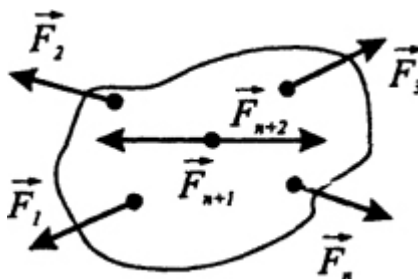


Рис. 6.4. Твердое тело под действием системы сил

Аналогичный результат получим при отбрасывании этих уравновешенных сил.

Из II и III аксиом вытекает как следствие следующее положение: **Следствие.**

Механическое состояние абсолютно твердого тела не нарушится, если приложенную к нему силу переносить по линии ее действия в любую точку тела, иными словами, сила есть скользящий вектор (рис. 6.5, силы $F \rightarrow_1 = F \rightarrow'_1, F \rightarrow_1 = F \rightarrow_1'$)

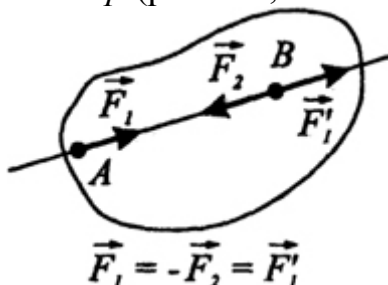


Рис. 6.5. Перенос силы по линии ее действия

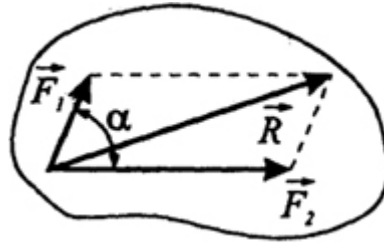


Рис. 6.6. Параллелограмм сил

Аксиома IV (аксиома параллелограмма). *Равнодействующая двух сил, приложенных к абсолютно твердому телу в одной точке под углом друг к другу, равна их геометрической сумме, т. е. выражается по модулю и направлению диагональю параллелограмма (рис. 6,6), построенного на этих силах. Точка приложения равнодействующей совпадает с точкой приложения данных сил:*

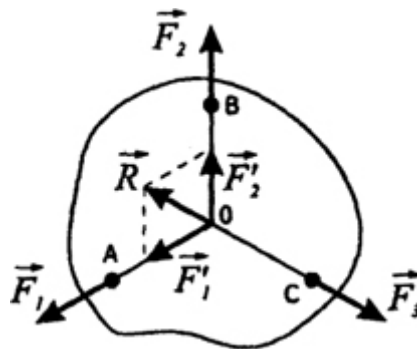


Рис. 6.7. Равновесие тела под действием трех сил

Следствие (теорема о трех силах). *Если три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости, представляют собой уравновешенную систему, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.*

Пусть к телу (рис. 6.7) в точках A, B, C приложены соответственно уравновешивающие силы $F \rightarrow_1, F \rightarrow_2, F \rightarrow_3$. Продолжим линии действия сил $F \rightarrow_1$ и $F \rightarrow_2$ до их пересечения в точке O , перенесем в нее эти силы и найдем их равнодействующую $R \rightarrow = F \rightarrow_1' + F \rightarrow_2'$ равновесие тела при этом не нарушится. Поэтому векторы силы $R \rightarrow$ и $F \rightarrow_3$ должны быть равны по модулю, лежать на одной прямой и направлены в разные стороны. Следовательно, линия действия силы $F \rightarrow_3$ также должна проходить через точку O , т. к. она совпадает с линией действия силы $R \rightarrow$.

Аксиома V (аксиома взаимодействия). *Силы взаимодействия между собой двух тел всегда равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.*

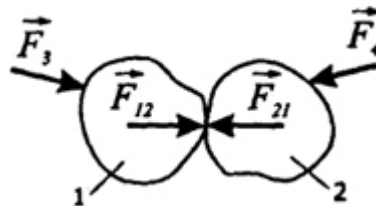


Рис. 6.8. Взаимодействие двух тел

Силы, которые действуют на систему тел со стороны других тел, не входящих в данную систему, называются *внешними*. Силы, с которыми отдельные тела систе-

мы действуют друг на друга, называют *внутренними* (реакциями связей). На рис. 6.8 силы $F \rightarrow_3$, $F \rightarrow_4$ - внешние, а $F \rightarrow_{12}$, $F \rightarrow_{21}$ - внутренние. В любой системе суммы внутренних сил всегда равны нулю ($F \rightarrow_{12} = F \rightarrow_{21}$, $F \rightarrow_{21} = -F \rightarrow_{12}$).

Величина и направление реакций связей зависят от величины и направления сил, действующих на них со стороны тела, а также от вида опор и характера закрепления тела.

6.4. Связи и реакции связей

В разделе 2 мы установили, что в пространстве свободное тело имеет шесть независимых движений: три поступательных перемещений вдоль осей X , Y , Z и три вращательных вокруг этих же осей, то есть в пространстве свободное тело имеет шесть степеней свободы. На плоскости свободное тело имеет три независимых движения: линейное перемещение вдоль осей X и Y и вращение вокруг какой-либо точки. Другими словами, свободное тело на плоскости имеет три степени свободы.

На практике обычно встречаются тела, которые соприкасаются или скреплены с другими телами, препятствующими перемещению данного тела в том или ином направлении. Тела, ограничивающие движение данного тела, называют *связями*. Таким образом, связи представляют собой ограничения, налагаемые на положения и скорости точек механической системы, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах [10].

Примером связей могут служить рельсы, на которые опирается вагон; трос, на котором висит груз; направляющие, по которым скользит ползун; опоры моста и др.

Связи противодействуют стремлению тела двигаться под действием активных сил. В соответствии с III законом Ньютона о равенстве действия и противодействия со стороны связей к телу приложены силы, которые называют *реакциями связей*.

Различают следующие основные виды связей и их реакций (без учета трения):

1. Гибкие связи (нить, трос, цепь, канат) (рис. 6.9, а). Реакции гибких связей направлены вдоль их продольной оси и приложены к телу в точке крепления. Работают они только на растяжение.

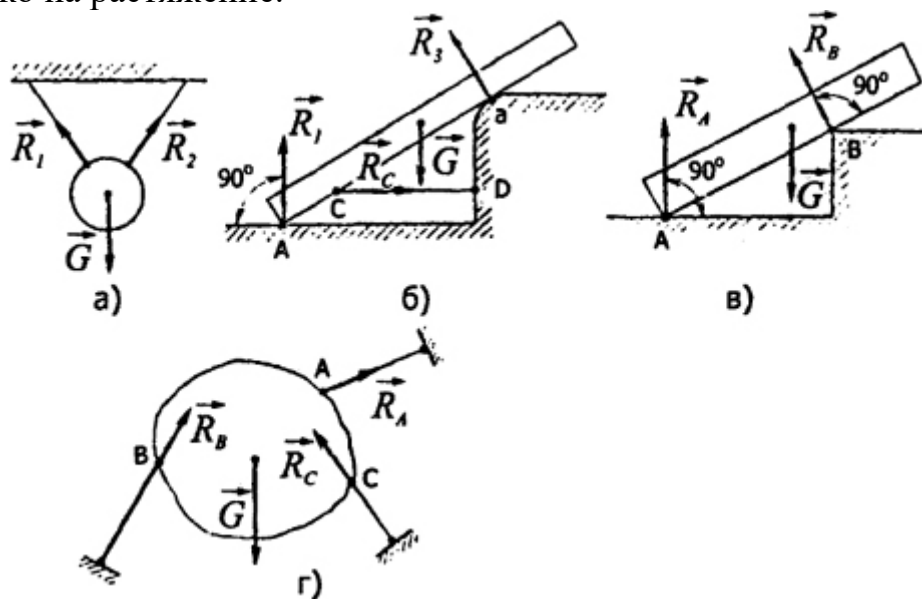


Рис. 6.9. Направление реакций различных связей

2. Если, например, тело опирается на **гладкую поверхность в точках А и В** и удерживается от скольжения нитью CD, то $R \rightarrow_A$ и

$R \rightarrow_B$ - реакции опорных поверхностей, а $R \rightarrow_C$ - реакция нити - направлены так, как показано на рис. 6.9, б.

3. Если тело опирается на ребро двугранного угла (**опорная точка**) (рис. 6.9, в), то реакция ребра $R \rightarrow_B$ направлена нормально к поверхности тела в точке касания.

4. Связь, осуществляемая *жесткими стержнями с шарнирным закреплением концов* (рис. 6.9, г). Реакции стержней направлены по их продольным осям; $R \rightarrow_A$ - реакция растянутого стержня и $R \rightarrow_B$ и $R \rightarrow_C$ - реакции сжатых стержней.

5. Неподвижный шарнир (шарнирно-неподвижная опора).

Такая опора состоит из двух обоей, между которыми расположен цилиндрический стержень. Одна обойма (рис. 6.10, а) закреплена на балке AB, а другая - на неподвижном основании. Кроме того, шарнирное соединение может выполняться с помощью пальца O, вставленного в цилиндрические отверстия стержня C и опоры D (рис. 6.10, б). Балка AB и стержень C могут только поворачиваться относительно оси шарнира. Другие перемещения исключены [8].

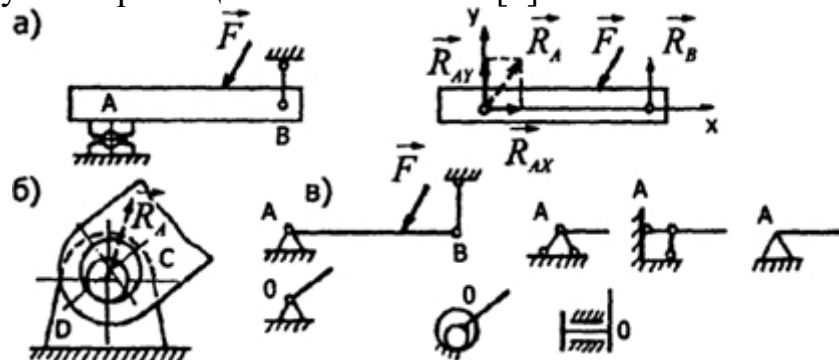


Рис. 6.10. Шарнирно-неподвижная опора: а - схемы; б - направления реакций; в - условные обозначения

Направление реакции связи заранее неизвестно. Реакция связи действует в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Для неподвижного шарнира она может быть представлена двумя составляющими по координатным осям:

$$\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay} \quad (6.4)$$

6. Подвижный шарнир (шарнирно-подвижная опора). Нижняя обойма в опоре А (рис. 6.11, а) установлена на цилиндрические катки. Поэтому балка AB имеет возможность поворачиваться вдоль опорной плоскости катков. Реакция связи направлена перпендикулярно к опорной плоскости катков.

Условные изображения шарнирно-подвижной опоры показаны на рис. 6.11, б.

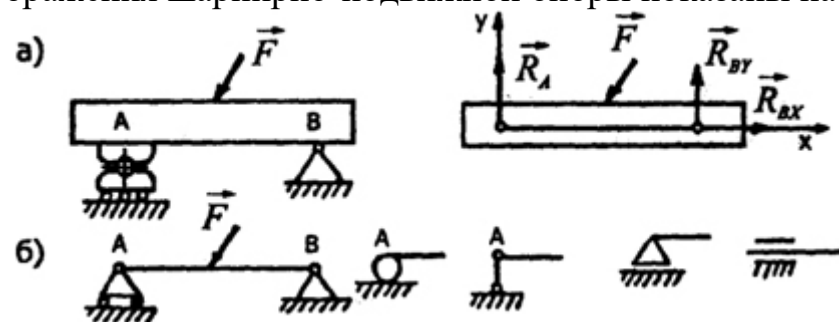


Рис. 6.11. Шарнирно-подвижная опора: а - схема и направления реакций; б - условные изображения

7. Сферический шарнир. Такая связь допускает вращение соединяемых тел относительно трех координатных осей, но без перемещения вдоль этих осей (рис.6.12). Реакция связи проходит через центр шарнира, а ее направление в пространстве может быть любым. Поэтому реакция $R \rightarrow$ сферического шарнира определяется составляющими по координатным осям:

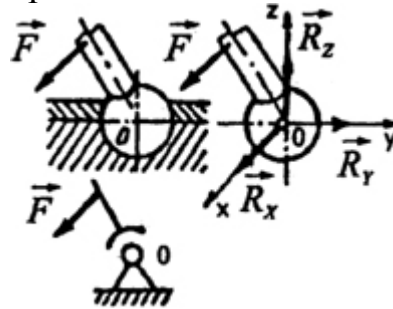


Рис. 6.12. Сферический шарнир, его условное изображение и направление реакций

8. Подпятник (рис. 6.13). Упорный подшипник или подпятник, препятствует осевым и радиальным перемещениям тел, например вала. Реакция подпятника может иметь произвольное направление в пространстве и определяется через составляющие $R \rightarrow_x$, $R \rightarrow_y$, $R \rightarrow_z$.

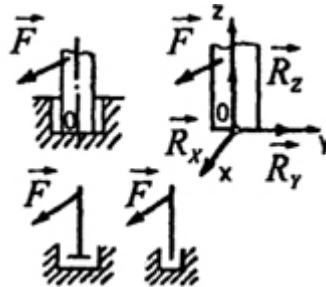


Рис. 6.13. Подпятник, его условное обозначение и направление реакций

9. Заделки. Глухая заделка, или жесткое защемление (рис. 6.14, а), исключает любые перемещения тела. Примером такой связи является соединение двух стержней с гарантированным натягом. При действии на балку плоской системы сил в заделке возникает пара сил с реактивным моментом M_A и произвольно направленная реакция $R \rightarrow_A$ с составляющими $R \rightarrow_{Ax}$ и $R \rightarrow_{Ay}$.

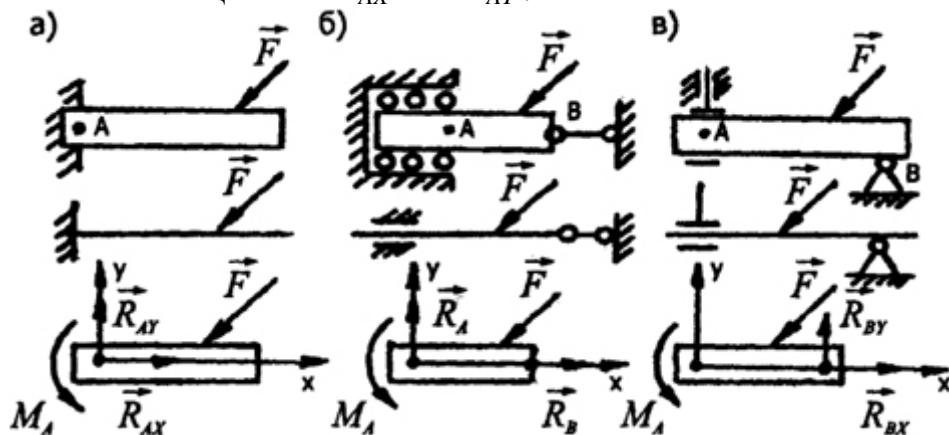


Рис. 6.14. Заделки: а-глухая, б- скользящая, в-свободная, и условные изображения направления реакций при действии плоской системы сил

Скользящая заделка (рис. 6.14, б) допускает осевое перемещение стержня, система реакций состоит из силы $R \rightarrow_A$ и пары сил с моментом M_A .

Свободная заделка (рис. 6.14, в) не препятствует перемещениям стержней вдоль своих осей, но исключает возможность их поворота. Поэтому, если не учитывать массу балки, в такой заделке возникает только реактивный момент M_A .

Контрольные вопросы

1. Какие вопросы решает статика?
2. Что такое сила и какова единица ее измерения?
3. Чем характеризуется сила?
4. Какая система сил называется уравновешенной, какая - неуравновешенной?
5. В чем отличие плоской и пространственной систем сил?
6. Какие силы называют активными, какие - реактивными?
7. В чем отличие сосредоточенной силы от распределенной?
8. Что такое равнодействующая системы сил?
9. В каком случае тело под действием только двух сил находится в равновесии?
10. Каково необходимое условие равновесия тела под действием трех сил?
11. Изменится ли механическое состояние тела, если приложенную к нему силу переносить по ее линии действия?
12. Как определить равнодействующую двух сил, приложенных к телу под углом друг к другу?
13. Перечислите основные виды связей и укажите направление их реакций

6.5. Проекция силы на ось и на плоскость

Спроецируем силы $\vec{F} \rightarrow$, $\vec{N} \rightarrow$, $\vec{T} \rightarrow$ и $\vec{P} \rightarrow$ на ось x (рис. 6.15). *Проекция силы (как и любого другого вектора) на ось x есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси x . Если этот угол острый - проекция положительна, если тупой - отрицательна, если сила перпендикулярна оси, - ее проекция на ось равна нулю, если сила параллельна оси, - ее проекция равна модулю силы.* Так, для сил, изображенных на рис. 6.15:

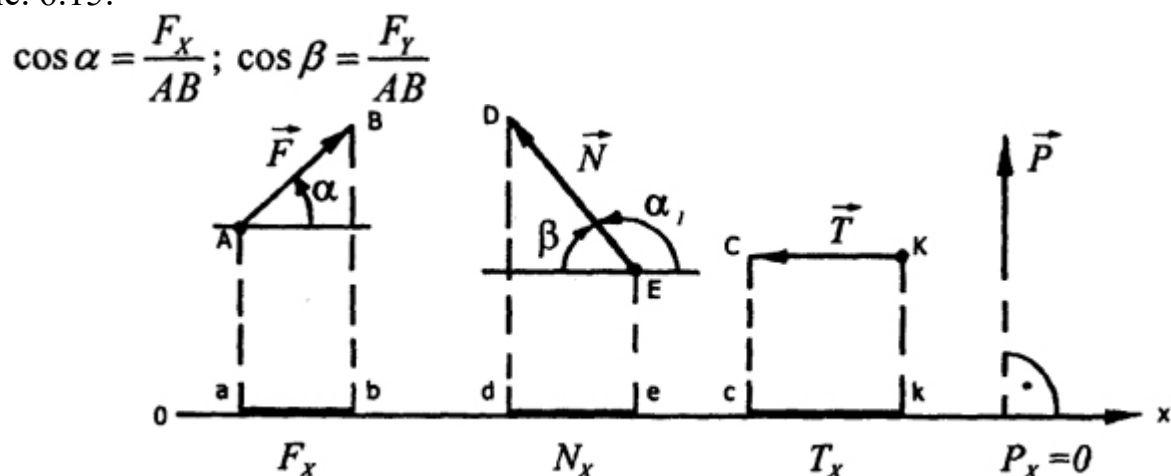


Рис. 6.15. Изменение проекции в зависимости от угла наклона силы к оси

Можно дать еще одно определение проекции силы на ось: *проекцией силы на ось называется расстояние между двумя перпендикулярами, опущенными на эту ось из начала и конца вектора силы*. Если направление силы совпадает с положительным направлением

оси, - ее проекция положительна, если не совпадает - отрицательна. Проекция силы на ось в отличие от силы величина скалярная.

Модуль и направление силы можно определить по ее проекциям на две взаимноперпендикулярные оси (рис. 6.16):

$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \cos \beta = F \cos(90^\circ - \alpha) = F \sin \alpha. \quad (6.6)$$

Из треугольника ABC , поскольку $AC = F_x$ и $EC = F_y$, следует, что модуль силы F равен

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \quad (6.7)$$

Направление силы определяют косинусы углов:

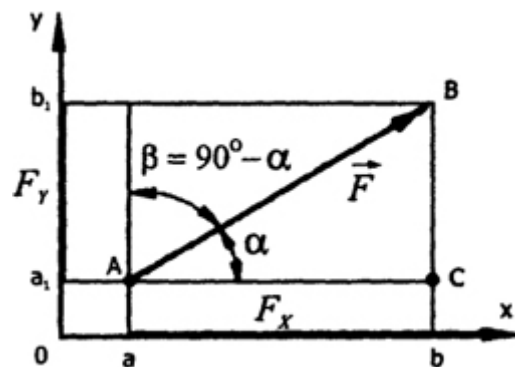


Рис. 6.16. Нахождение силы по ее проекциям на оси координат

Проекцией силы $F \rightarrow$ на плоскость Oxy называется вектор $F \rightarrow_{xy} = OB \rightarrow_1$, заключенный между проекциями начала и конца силы $F \rightarrow$ на эту плоскость (рис. 6.17). Таким образом, в отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина не скалярная, а векторная, так как она характеризуется не только своими числовыми значениями, но и направлением в плоскости Oxy . По модулю $F \rightarrow_{xy} = F \rightarrow \cos \theta$, где θ - угол между направлением силы $F \rightarrow$ и ее проекцией F_{xy} .

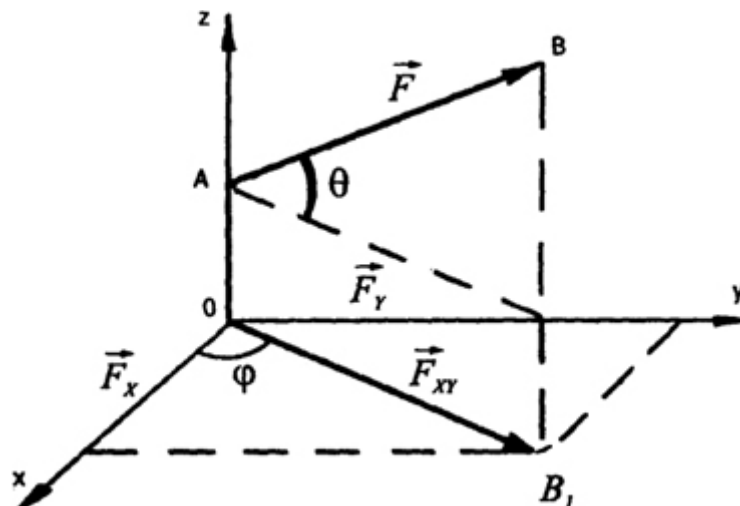


Рис. 6.17. Проекция силы на плоскость

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось. Например, в случае, изображенном на рис. 6.17:

$$F_x = F_{xy} \cos \varphi = F \cos \theta \cos \varphi, \quad F_y = F_{xy} \sin \varphi = F \cos \theta \sin \varphi. \quad (6.7)$$

Проекции силы на координатные оси можно обозначать соответствующими заглавными буквами X, Y, Z, то есть $F_x = X$, $F_y = Y$,

6.6. Момент силы относительно точки

Рассмотрим гайку, которую затягивают гаечным ключом определенной длины, прикладывая к концу ключа мускульное усилие. Если взять гаечный ключ в несколько раз длиннее, то прилагая то же усилие, гайку можно затянуть значительно сильнее. Из этого следует, что одна и та же сила может оказывать различное вращательное действие. Вращательное действие силы характеризуется *моментом силы*.

Понятие момента силы относительно точки ввел в механику итальянский ученый и художник эпохи Возрождения Леонардо да Винчи.

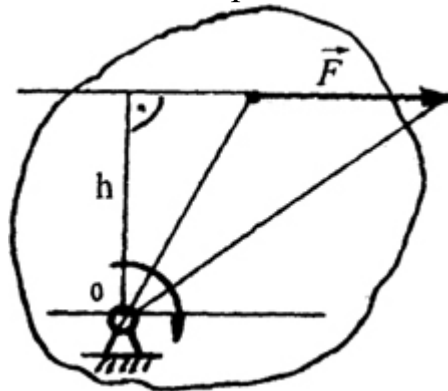


Рис. 6.18. Момент силы относительно точки

Моментом силы относительно точки называется произведение модуля силы на ее плечо (рис. 6.18):

$$M_0(\vec{F}) = F \cdot h \quad (6.8)$$

Точка, относительно которой берется момент, называется *центром момента*. *Плечом силы относительно точки называется кратчайшее расстояние от центра момента до линии действия силы.*

Единица момента силы:

$$[M] = [F] \cdot h = \text{сила} \times \text{длина} = \text{Ньютон} \times \text{метр} = \text{Н} \cdot \text{м}$$

Условимся считать момент силы *положительным*, если сила стремится вращать свое плечо вокруг центра момента против часовой стрелки, и наоборот (рис. 6.19).

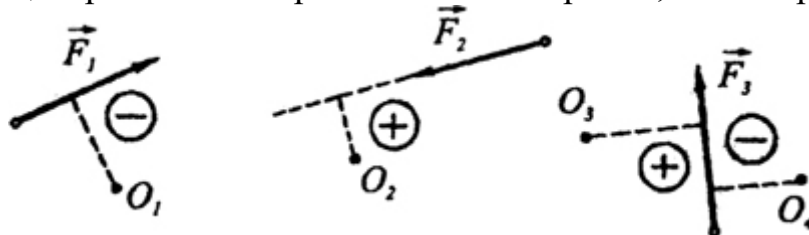


Рис. 6.19. Определение знака момента

Из определения момента силы относительно точки очевидно следующее: 1) одна и та же сила относительно разных точек может

давать и положительный, и отрицательный момент (рис. 6.19, сила $F \rightarrow_3$); 2) момент силы относительно точки, лежащей на линии действия этой силы, равен нулю, так как в этом случае плечо равно нулю; 3) модуль и знак момента не изменятся при переносе силы по линии ее действия либо центра моментов по прямой, параллельной линии действия силы.

Пример 1. Определить моменты сил F_1 ; F_2 ; F_3 ; F_4 относительно точки A (рис. 6.20), если $AB = 0,7$ м; $AD = 0,4$ м; $AC = 0,2$ м; $F_1 = 10$ Н; $F_2 = 25$ Н; $F_3 = 5$ Н; $F_4 = 8$ Н; $\alpha = 45^\circ$.

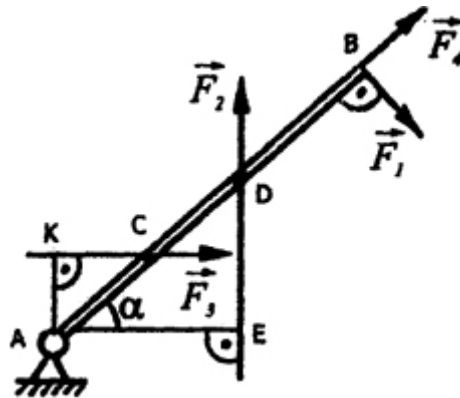


Рис. 6.20.

Решение: 1. Момент силы F_1 относительно точки A отрицательный, а плечо силы равно AB , поэтому

$$M_A(\vec{F}_1) = -F_1 AB = -10 \cdot 0,7 = -7 \text{ Нм}.$$

2. Момент силы F_2 относительно точки A положительный, так как сила F_2 стремится вращать тело AB против часовой стрелки. Из треугольника ADE плечо силы F_2 : $AE = AD \cos 45^\circ$, следовательно:

$$M_A(\vec{F}_2) = F_2 \cdot AD \cos 45^\circ = 25 \cdot 0,4 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ Нм}$$

3. Момент силы F_3 относительно точки A отрицательный. Из треугольника AKC плечо силы F_3 : $AK = AC \cos 45^\circ$, следовательно:

$$\begin{aligned} M_A(\vec{F}_3) &= -F_3 \cdot AK = -F_3 \cdot AC \cos 45^\circ = \\ &= -5 \cdot 0,2 \cdot 0,707 = -0,707 \text{ Нм} \end{aligned}$$

4. Линия действия силы F_4 пересекает центр моментов, значит, $M_A(F \rightarrow_4) = 0$.

6.7. Момент силы относительно оси

Момент силы $P \rightarrow$ относительно оси z равен моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси z , относительно точки O (точки пересечения рис z . плоскостью τ (рис. 6.21))

$$M_z(\vec{P}) = M_o(\vec{P}_\tau) = \pm P_\tau h = \pm Ph \cos \alpha, \quad (6.9)$$

где $P \rightarrow_\tau$ - проекция силы $P \rightarrow$ на плоскость перпендикулярную оси z ; h - длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия проекции $P \rightarrow_\tau$ [9].

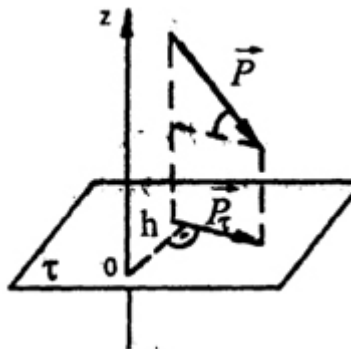


Рис.6.21. Проекция силы на плоскость

Отметим, что проекция силы на ось - *скалярная величина*; проекция силы на плоскость - *вектор*. Момент считается *положительным*, если, глядя с конца положительного направления оси, видим вращение плоскости, τ под действием составляющей $P \rightarrow \tau$, против часовой стрелки. В противном случае момент считается *отрицательным*.

Из выражения (6.9) следует, что момент силы относительно оси равен нулю, если сила пересекает ось ($h = 0$) или параллельна оси ($P \rightarrow \tau = 0$).

Пример 2. К твердому телу, имеющему форму куба со стороной $a = 0,5$ м, приложены четыре силы: $P_1 = 10$ Н, $P_2 = 20$ Н, $P_3 = 30$ Н, $P_4 = 40$ Н. Найти сумму моментов этих сил относительно координатных осей, совпадающих с ребрами куба (рис. 6.22).

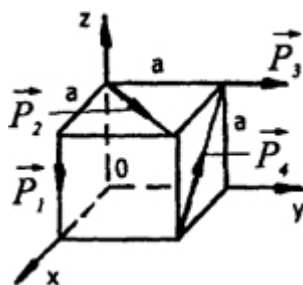


Рис. 6.22.

Решение. Искомые суммы моментов относительно координатных осей равны:

$$\sum M_x = 0 - P_2 a \cos 45^\circ - P_3 a + P_4 a \cos 45^\circ =$$

$$= (-20 \cdot 0,707 - 30 + 40 \cdot 0,707) 0,5 = -7,93 \text{ Нм},$$

$$\sum M_y = P_1 a + P_2 a \cos 45^\circ + 0 - P_4 a \cos 45^\circ =$$

$$= (10 + 20 \cdot 0,707 - 40 \cdot 0,707) 0,5 = 2,07 \text{ Нм};$$

$$\sum M_z = 0 + 0 + 0 + P_4 a \cos 45^\circ = 40 \cdot 0,707 \cdot 0,5 = 14,14 \text{ Нм}.$$

Контрольные вопросы

1. Чему равна проекция силы на ось?
2. В каких случаях проекция силы на ось равна нулю, а в каких - модулю силы?
3. Как определяется знак проекции силы на ось?
4. Как найти модуль и направление силы, если известны ее проекции на две взаимно перпендикулярные оси координат?
5. Что называется проекцией силы на плоскость?

6. В чем отличие проекции силы на ось и на плоскость?
7. Чему равен модуль момента силы относительно точки
8. Что представляет собой плечо?
9. Как определяют знак момента относительно точки?
10. Изменится ли знак и модуль момента, если силу переносить вдоль ее линии действия?
11. Чему равен момент силы относительно точки, лежащей на линии действия этой силы?
12. Чему равен момент силы относительно оси?
13. Как определяется знак момента силы относительно оси?
14. Когда момент силы относительно оси равен нулю.

6.8. Понятие пары сил. Свойства пар

Систему из двух равных по модулю, параллельных и направленных в разные стороны сил называют парой сил (рис. 6.23). Плоскость, в которой действует пара сил, называют плоскостью действия пары [9].

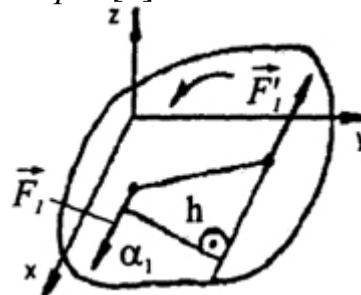


Рис. 6.23. Пара сил

Силы, из которых состоит пара, не лежат на одной прямой, следовательно, они не уравновешивают друг друга. Тело под действием пары стремится вращаться в плоскости ее действия. Вспомните рулевое колесо автомобиля, маховичок крана, отвертку, гайку, на грани которой действует ключ, и др.

Пару нельзя заменить одной силой (равнодействующей), потому что под действием только одной силы тело должно было бы двигаться поступательно. Пара сил в отличие от любой другой неуравновешенной системы сил не поддается дальнейшему упрощению и сама является простейшим элементом.

Кратчайшее расстояние между линиями действия пары называется плечом пары h .

Плоскость, в которой лежат силы, образующие пару, называют плоскостью действия пары. Произведение модуля одной из сил пары на ее плечо называют моментом пары и обозначают

$$M = \pm F_1 \cdot h = \pm F_1' \cdot h \quad (6.10)$$

Если пара сил вращает тело против часовой стрелки, то момент такой пары считается *положительным*, если по часовой стрелке - *отрицательным*.

Пара сил обладает следующими свойствами:

1. Так как пару нельзя заменить одной силой, то ее нельзя и уравновесить одной силой. Пару можно уравновесить только парой, имеющей равный по модулю и противоположный по знаку момент.

2. Сумма моментов сил пары относительно любой точки, взятой на ее плоскости действия, есть величина постоянная, равная моменту данной пары.

3. Сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю.

4. Две пары, лежащие в одной плоскости и имеющие равные по модулю и знаку моменты, - эквивалентны, т. е. оказывают на твердое тело одинаковое механическое воздействие.

5. Не изменяя действия на тело, пару сил можно:

- а) как угодно перемещать в ее плоскости;
- б) переносить в любую плоскость, параллельную плоскости действия этой пары;
- в) изменять модуль сил и плечо пары, но так, чтобы ее момент (т. е. произведение модуля силы на плечо) и направление вращения оставались неизменными.

Сложение пар. Система пар, лежащих в одной плоскости или параллельных плоскостях, эквивалентна одной равнодействующей паре tr , момент которой равен алгебраической сумме моментов слагаемых пар, т.е.

$$M_R = \sum M. \quad (6.11)$$

Равновесие пар. Плоская система пар находится в равновесии, если алгебраическая сумма моментов всех пар равна нулю, т.е.

$$\sum M = 0.$$

Пример 3. На балку, свободно опирающуюся на гладкий уступ A и шарнирно укрепленную в точке B , действует пара с моментом $M = 1500 \text{ Нм}$. Определить реакции в опорах, если $l = 2 \text{ м}$ (рис. 6.24, а).

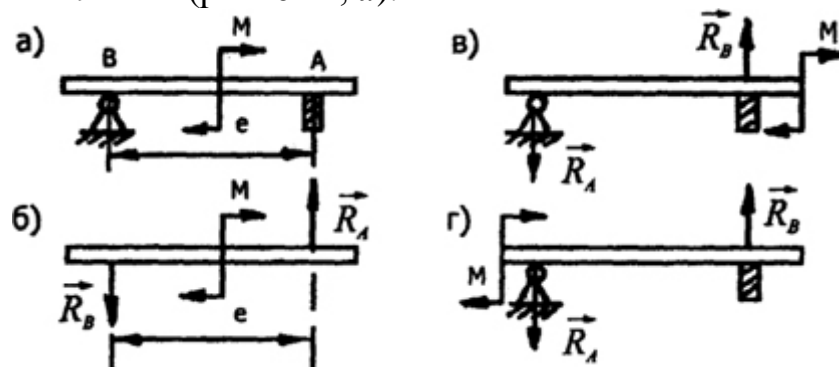


Рис. 6.24

Решение. Пару может уравновесить только другая пара с равным, но противоположно направленным моментом (рис. 6.24, б). Следовательно,

$$R_A = R_B = \frac{M}{l} = \frac{1500}{2} = 750 \text{ Н}.$$

Отметим, что независимо от того, где приложен внешний момент, реакции в опорах не изменяются (рис. 6.18, в, г).

Пример 4. На изогнутую под углом 30° балку, свободно опирающуюся в точке A и имеющую шарнир в точке B , действуют моменты $M_1 = 1000 \text{ Н}$, $M_3 = 2500 \text{ Н}$. Какой момент M_2 необходимо приложить к балке, чтобы реакция в опоре A равнялась 100 Н (рис. 6.25).

Решение. Допустим, искомый момент M_2 совпадает по направлению с M_1 и M_3 . Тогда на балку действуют три заданных момента: M_1 , M_2 и M_3 . Их уравновесит четвертая пара, создаваемая равными реакциями опор $N \rightarrow$ (рис. 6.25, б). Так как реак-

ция опоры A перпендикулярна AC , то и реакция в шарнире B также перпендикулярна

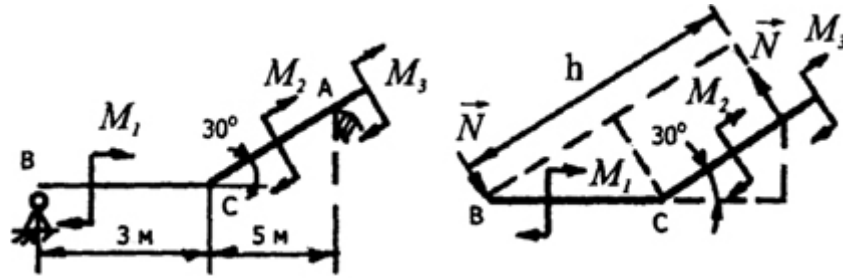


Рис. 6.25

AC . Для равновесия системы пар необходимо, чтобы сумма их моментов равнялась нулю, т.е.

$$\sum M = 0: -M_1 - M_2 - M_3 + Nh = 0,$$

откуда искомый момент

$$M_2 = Nh - M_1 - M_3 = 100 \cdot 7,8 - 1000 - 2500 = -2720 \text{ Нм},$$

где h - плечо момента, создаваемого реакциями,

$$h = 5 \cos 30^\circ + \frac{3}{\cos 30^\circ} = 7,8 \text{ м}.$$

Момент M_2 имеет знак минус, следовательно, первоначально выбранное направление надо изменить на противоположное.

6.9. Система сходящихся сил

Равнодействующая системы сил. Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется системой сходящихся сил. Равнодействующую силу такой системы можно определить графически с помощью построения силового многоугольника. Для этого из произвольной точки O_1 (рис. 6.26, б) в выбранном масштабе μ_F проводится вектор, равный по модулю и параллельный силе F_1 . Из конца этого вектора строится вектор, равный силе F_2 и т.д. Соединив точку O_1 с концом последнего вектора, получим замыкающую сторону многоугольника O_1N , которая

в данном масштабе представляет собой искомую равнодействующую системы $R \rightarrow$. Точка приложения равнодействующей совпадает с точкой A .

Модуль и направление равнодействующей не изменится, если изменить порядок, в котором откладываются вектора сил при построении силового многоугольника.

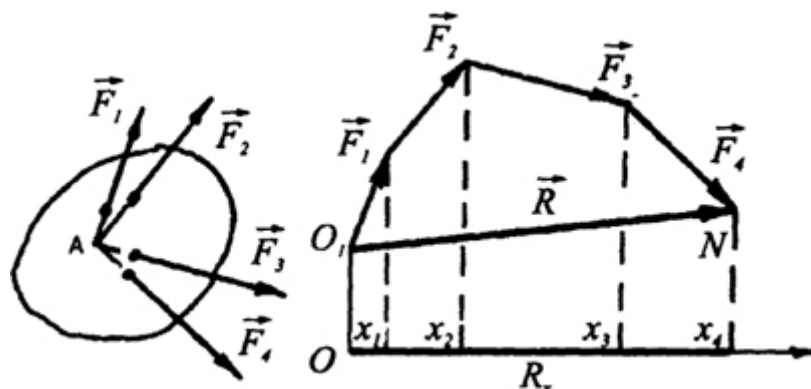


Рис. 6.26. Система сходящихся сил (а) и многоугольник сил (б)

Ломаная линия, звенья которой равны и параллельны векторам заданных сил, называется *силовым многоугольником*, или *многоугольником сил*.

Равнодействующая системы сходящихся сил определяется замыкающей стороной многоугольника сил, приложена в точке пересечения линий действия исходных сил и равна их геометрической векторной сумме:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j \quad (6.11)$$

Если конец последнего вектора $\vec{F} \rightarrow_n$ совпадает с началом первого вектора $\vec{F} \rightarrow_1$ (последняя вершина многоугольника сил совпадает с первой), многоугольник сил получается замкнутым, и, следовательно, равнодействующая равна нулю ($R \rightarrow = 0$). В этом случае система сходящихся сил ($\vec{F} \rightarrow_1, \vec{F} \rightarrow_2 \dots \vec{F} \rightarrow_n$) является *уравновешенной*.

66

Замкнутость силового многоугольника является *геометрическим условием равновесия плоской системы сходящихся сил*. Это условие используют при решении задач на равновесие.

Метод проекций для определения равнодействующей. Равнодействующую сходящихся сил можно определить и *аналитическим* способом. Проецируя все силы, входящие в многоугольник сил, на произвольную ось X , получаем X_1, X_2, X_3, X_4 - проекции составляющих сил $\vec{F} \rightarrow_1, \vec{F} \rightarrow_2, \vec{F} \rightarrow_3, \vec{F} \rightarrow_4$; R_x - проекция равнодействующей на эту ось.

Из рис. 6.26, б следует, что $R_x = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = \Sigma X$.

Равнодействующую плоской системы сходящихся сил можно определить аналитически по известным ее проекциям R_x и R_y на две взаимно перпендикулярные оси координат.

Модуль равнодействующей на основании выражения (6.7) можно найти по формуле:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad (6.12)$$

где $R_x = \Sigma F_{ix}, R_y = \Sigma F_{iy}$.

Для пространственной системы сил

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (6.13)$$

где $R_z = \Sigma F_{iz}$.

6.10. Геометрическое и аналитическое условия равновесия системы сходящихся сил

Необходимым и достаточным условием равновесия плоской системы сходящихся сил является равенство нулю равнодействующей этой системы сил. Это условие можно выразить одним векторным равенством

$$R_x = \Sigma F_{ix}, R_y = \Sigma F_{iy}.$$

или двумя алгебраическими (скалярными) равенствами:

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0. \quad (6.15)$$

Векторное равенство (6.14) выражает условие замкнутости многоугольника данных сил, т. е. условие равновесия плоской системы сходящихся сил в *геометрической форме*. Равенства (6.15) выражают условие равновесия плоской системы

сходящихся сил в *аналитической форме* и их называют условиями равновесия плоской системы сходящихся сил: для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на координатные оси были равны нулю.

6.11. Методические указания к решению задач на равновесие системы сходящихся сил [9]

При решении задач *геометрическим* (графическим) способом необходимо придерживаться следующего порядка:

Выделить тело (или точку), равновесие которого следует рассмотреть.

Изобразить все активные (заданные) силы, действующие на выделенное тело.

Освободить это тело от наложенных на него связей, заменив их действие реакциями связей.

Построить замкнутый силовой многоугольник (или треугольник - если действуют три силы). При этом следует сначала сложить все заданные, а затем достроить неизвестные силы.

При решении задач *аналитическим* способом рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1 . Выделить тело (или точку), равновесие которого следует рассмотреть.

Изобразить активные (заданные) силы, действующие на выделенное тело.

Освободить тело от наложенных на него связей, заменив их действие реакциями связей.

Выбрать систему координат. Координатные оси следует по возможности направлять по неизвестным силам, тогда проекция неизвестной силы на перпендикулярную ей ось окажется равной нулю. Благодаря этому в уравнение равновесия войдет только одно неизвестное.

Составить уравнения равновесия плоской системы сил: $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$. При проектировании силы на ось модуль силы следует умножать на косинус острого угла независимо от того, с каким направлением оси (положительным или отрицательным) он образован. Проекция, соответственно, положительна или отрицательна (см. рис. 6.15).

Решить уравнения равновесия относительно искомых величин.

Преимущества аналитического способа проекций перед геометрическим способом силового многоугольника особенно заметны в задачах на равновесие системы более трех сил. Действительно, решение силового четырех-, пяти- и n -угольника представляет известные трудности, в то время как решение методом проекций не усложняется при увеличении числа проектируемых сил.

Пример 5. В шарнире B кронштейна ABC подвешен груз силой тяжести $G = 100$ Н. Определить усилия в стержнях кронштейна, если $\alpha = 110^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 40^\circ$. Стержни прикреплены к стене шарнирно (рис. 6.27, а).

Решение. Рассмотрим равновесие шарнира B (рис. 6.27, б). К нему приложена активная сила $G \rightarrow$. Отбросим связи, заменив их реакциями

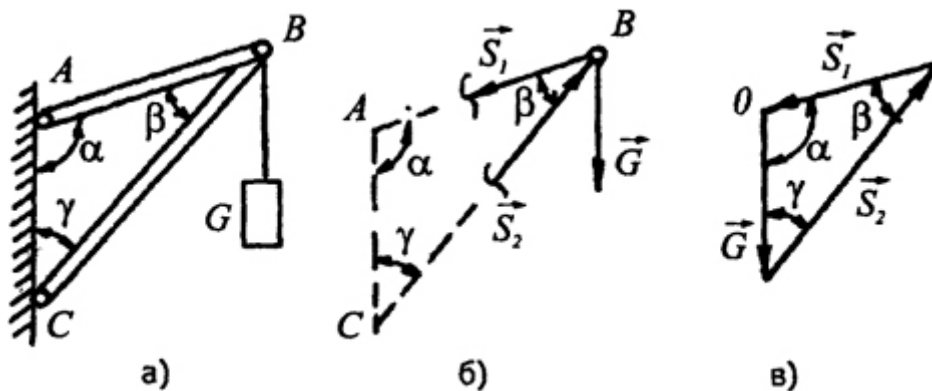


Рис. 6.27

$S \rightarrow_1$ и $2 \rightarrow_2$. Предположим, что стержень AB растянут, а BC сжат. Тогда $S \rightarrow_1$ будет направлена от шарнира B , а $S \rightarrow_2$ - к нему. Итак, на узел B действует система трех сходящихся сил.

Для решения применим геометрический способ. Поскольку шарнир находится в равновесии, то силовой треугольник, составленный из этих сил, должен быть замкнут. Из некоторой точки O (рис. 6.27, в) в выбранном масштабе строим вектор $G \rightarrow$, а затем из его начала и конца проводим прямые, параллельные направлениям $S \rightarrow_1$ и $S \rightarrow_2$ до их пересечения. По масштабу находим $S_1 = 130 \text{ Н}$, $S = 190 \text{ Н}$. Совершая обход по треугольнику в направлении силы G , замечаем, что полученные направления реакций стержней совпадают с первоначально выбранными. Следовательно, стержень AB растягивается, а BC сжимается.

Модули S_1 и S_2 можно определить также по теореме синусов:

$$\frac{G}{\sin \beta} = \frac{S_1}{\sin \gamma} = \frac{S_2}{\sin \alpha}.$$

Откуда

$$S_1 = G \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = 100 \frac{\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 128,6 \text{ Н},$$

$$S_2 = G \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 100 \frac{\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ} = 188 \text{ Н}.$$

Несовпадение результатов, полученных графическим и расчетным путями, не превышает 1 %:

$$\epsilon_2 = \frac{190 - 188}{188} \cdot 100 = 1\%, \quad \epsilon_1 = \frac{130 - 128,6}{128,6} \cdot 100 = 1,1\%.$$

Пример 6. Балка AB из однородного материала массой $m = 100 \text{ кг}$ удерживается в горизонтальном положении с помощью стержня CB , образующего угол $\alpha = 30^\circ$ с осью балки (рис. 6.28, а). Необходимо определить реакции в шарнирах A и B .

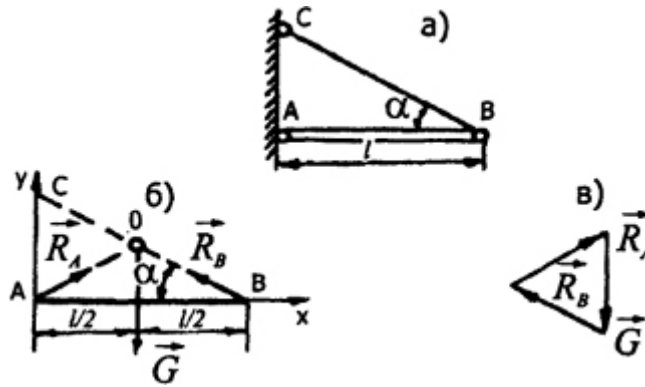


Рис.6.28.

Решение. Для решения применим аналитический способ. Рассмотрим условия равновесия балки AB . На нее действуют сила тяжести $G = mg = 100 \cdot 9,81 = 981 \text{ Н}$, приложенная в середине балки, реакция $R \rightarrow B$, направленная вдоль оси стержня BC от B к C , и реакция $R \rightarrow A$, направление которой пока неизвестно (рис. 6.28, б).

Балка находится в равновесии при действии трех сил, линии действия которых, согласно теореме о трех силах, должны пересекаться в одной точке (точка O). Поэтому реакция шарнира A направлена вдоль линии AO (рис. 6.28, в).

Введем в систему координат Axy и составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0, R_A \cos \alpha - R_B \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0, R_A \sin \alpha + R_B \sin \alpha - G = 0.$$

Решив эту систему уравнений, найдем:

$$R_A = R_B = G = 981 \text{ Н}.$$

Треугольник сил изображен на рис. 6.28, в.

6.12. Условия равновесия твердых тел

Пространственная система сил. Для равновесия тела в пространстве необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на координатные оси и суммы моментов всех сил относительно трех координатных осей равнялись нулю.

$$\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0; \sum F_{iz} = 0; \quad (6.16)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0; \sum M_y(\vec{F}_i) = 0; \sum M_z(\vec{F}_i) = 0.$$

В упрощенной форме эти условия иногда записываются так:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0; \quad (6.17)$$

$$\sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0.$$

Условия (6.16 или 6.17) называют уравнениями равновесия произвольной пространственной системы сил.

Если на тело, кроме сил, действуют и пары сил, заданные их моментами, то они входят в последние три уравнения.

Частные случаи. 1. Для пространственной системы сходящихся сил получим уже известную систему:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0.$$

2. Для пространственной системы сил, параллельных оси X :

$$\sum X = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0;$$

оси Y :

$$\sum Y = 0, \sum M_x = 0, \sum M_z = 0;$$

оси Z :

$$\sum Z = 0, \sum M_y = 0, \sum M_x = 0.$$

В пространстве всякое свободное тело имеет шесть независимых движений - шесть степеней свободы. Каждое уравнение равновесия лишает тело одной степени свободы, шесть уравнений лишают свободное твердое тело всех шести степеней свободы.

Плоская система сил. Из шести уравнений равновесия в плоской системе остаются только три, которые можно представить в трех формах записи:

- первая (основная) форма:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M_O = 0; \quad (6.18)$$

- вторая форма:

$$\sum X = 0, \sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \quad (6.19)$$

причем ось Ox не должна быть перпендикулярна прямой AB ;

- третья форма (уравнения трех моментов):

$$\sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum M_C = 0, \quad (6.20)$$

здесь любые три точки A, B, C не должны лежать на одной прямой.

6.13. Методические указания к решению задач статики на равновесие твердых тел

При решении задач на равновесие твердого тела, к которому приложена плоская система сил, надо выполнить три первых пункта, указанных в п. 6.1 1. При этом необходимо убедиться, что данная задача является статически определимой - число неизвестных величин должно быть не более трех (для системы параллельных сил - не более двух).

Затем:

4. Направить оси координат и выбрать моментные точки.

5. Составить уравнения равновесия.

6. Решить систему полученных уравнений равновесия относительно неизвестных величин.

Если в результате решения искомая реакция получилась положительной, то это значит, что направление ее выбрано правильно, если отрицательной, то направление реакции необходимо заменить на противоположное (модуль ее при этом остается прежним).

После того как задача решена, необходимо произвести проверку. Для этого следует составить не применявшуюся при решении сумму моментов или проекций. При этом необходимо учитывать уже исправленные направления реакций. Равенство нулю алгебраической суммы проекций или моментов подтвердит правильность решения задачи.

Пример 7. На рис. 6.29 схематически изображен подъемный кран. В точке D на расстоянии 5 м от оси AB крана подвешен груз $P = 50 \text{ кН}$. Сила тяжести крана $G = 30 \text{ кН}$. Определить реакции подпятника A и подшипника B .

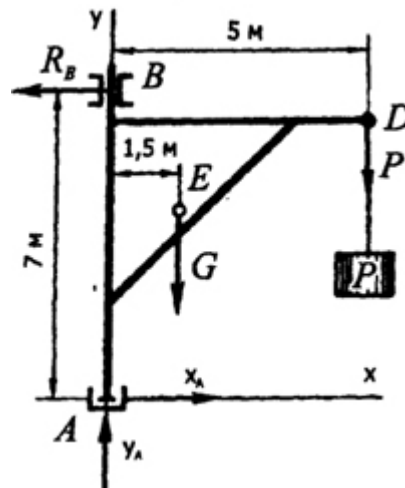


Рис. 6.29

Решение. Рассмотрим равновесие крана. Реакция R_B подшипника B направлена перпендикулярно его оси, реакцию подпятника A разложим на две составляющие: X_A и Y_A . Таким образом, к крану приложена плоская система пяти произвольно расположенных сил, из которых три неизвестны. Применим к этой системе аналитические условия равновесия и составим три уравнения:

$$\sum M_A = 0; +R_B \cdot 7 - G \cdot 1,5 - P \cdot 5 = 0,$$

$$\sum X = 0; -R_B + X_A = 0,$$

$$\sum Y = 0; Y_A - P - G = 0.$$

Решая первое уравнение, получим:

$$R_B = (G \cdot 1,5 + P \cdot 5) / 7 = (30 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 50 \cdot 10^3 \cdot 5) / 7 = 42,1 \cdot 10^3 \text{ Н} = 42,1 \text{ кН}.$$

Из второго уравнения следует:

$$X_A = R_B = 42,1 \text{ кН}.$$

Из третьего уравнения находим

$$Y_A = P + G = 50 + 30 = 80 \text{ кН}.$$

Проверим решение, составив контрольное уравнение моментов относительно точки B :

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0; -G \cdot 1,5 - P \cdot 5 + X_A \cdot 7 = \\ &= -30 \cdot 1,5 - 50 \cdot 5 + 42,1 \cdot 7 = -295 + 294,7 \approx 0 \end{aligned}$$

Пример 8. На горизонтальную балку AB , заделанную в стену в точке A действует сила $P = 400 \text{ Н}$, приложенная в точке B под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали и момент $M = 3000 \text{ Нм}$. На участке BC действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 250 \text{ Н/м}$. Определить реакции в заделке (рис. 6.30).

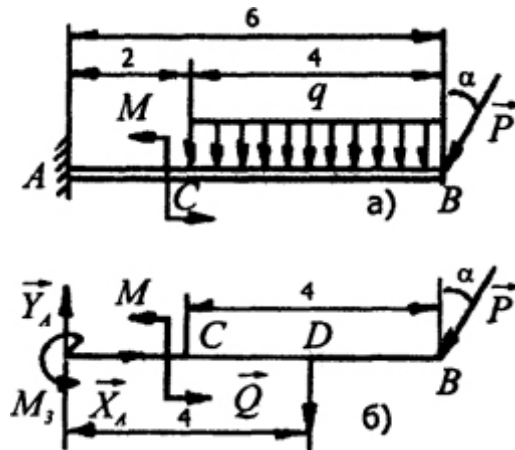


Рис. 6.30

Решение. Заменим равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой Q , приложенной в точке D (середине BC) и равной

$$Q = qBC = 250 \cdot 4 = 1000 \text{ Н}.$$

Рассмотрим равновесие балки. К ней приложены активные нагрузки: P , Q , M . Освободимся от связи - заделки, заменив ее вертикальной реакцией $Y \rightarrow_A$, горизонтальной реакцией $X \rightarrow_A$ и моментом M_3 (рис. 6.30, б).

Задача статически определима. Направим оси координат и составим уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0; -P \cos 30^\circ \cdot 6 - Q \cdot 4 + M + M_3 = 0; \quad (\text{а})$$

$$\sum X = 0; X_A - P \cos 60^\circ = 0; \quad (\text{б})$$

$$\sum Y = 0; Y_A - Q - P \cos 30^\circ = 0. \quad (\text{в})$$

Уравнение (а) позволит определить момент заделки

$$M_3 = P \cos 30^\circ \cdot 6 + Q \cdot 4 - M = 400 \cdot 0,866 \cdot 6 + 1000 \cdot 4 - 3000 = 3075 \text{ Нм}.$$

Из (б) находим горизонтальную реакцию

$$X_A = P \cos 60^\circ = 400 \cdot 0,5 = 200 \text{ Н}.$$

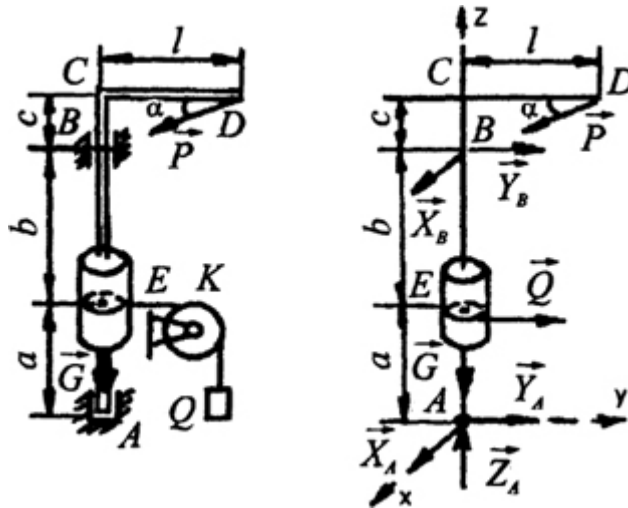
Из (в) определяем вертикальную реакцию

$$Y_A = Q + P \cos 30^\circ = 1000 + 400 \cdot 0,866 = 1346 \text{ Н}.$$

Произведем проверку, составив сумму моментов относительно точки C :

$$\begin{aligned} \sum M_c &= M_3 - Y_A \cdot 2 + M - Q \cdot 2 - P \cdot 4 \cos 30^\circ = \\ &= 3075 - 1346 \cdot 2 + 3000 - 1000 \cdot 2 - 400 \cdot 4 \cdot 0,866 = \\ &= 6075 - 6077 \approx 0. \end{aligned}$$

Пример 9. Груз $Q = 500 \text{ Н}$ поднимается при помощи вертикального ворота. Определить горизонтальную силу P , приложенную к рукоятке ворота под углом $\alpha = 30^\circ$, а также реакции подшипников A и B , если участок веревки EK параллелен рукоятке CD . Сила тяжести барабана $G = 200 \text{ Н}$, $r = 0,1 \text{ м}$, $a = 0,25 \text{ м}$, $b = 0,35 \text{ м}$, $c = 0,15 \text{ м}$ и $CD = l = 0,5 \text{ м}$ (рис. 6.31, а).



Рас. 6.37

Решение. Рассмотрим равновесие ворота (рис. 6.31, б). К нему приложены активные силы: $G \rightarrow$, $Q \rightarrow$, $P \rightarrow$. Отбросим связи, заменив их реакциями. Реакция веревки приложена к вороту в точке E и численно равна Q . Подпятник A даст три реакции $Z \rightarrow_A$, $X \rightarrow_A$, Y_A , а опора B - две $X \rightarrow_B$, $Y \rightarrow_B$. Всего имеется шесть неизвестных (искомая $P \rightarrow$ и пять реакций) - задача статически определима. Направим оси координат и составим шесть уравнений равновесия:

$$\sum X = 0; \quad P \sin \alpha + X_B + X_A = 0; \quad (a)$$

$$\sum Y = 0; \quad -P \cos \alpha + Y_B + Q + Y_A = 0; \quad (б)$$

$$\sum Z = 0; \quad -G + Z_A = 0; \quad (в)$$

$$\sum M_x = 0; \quad P \cos \alpha (a + b + c) - Y_B (a + b) - Qa = 0; \quad (г)$$

$$\sum M_y = 0; \quad P \sin \alpha (a + b + c) - X_B (a + b) = 0; \quad (д)$$

$$\sum M_z = 0; \quad Qr - Pl \sin \alpha = 0; \quad (е)$$

Решая (е), получаем

$$P = Q \frac{r}{l \sin \alpha} = \frac{500 \cdot 10}{0,5 \cdot 0,5} = 200 \text{ Н}.$$

Из уравнения (г)

$$Y_B = \frac{P(a + b + c) \cos \alpha - Qa}{a + b} = \frac{200 \cdot 0,75 \cdot 0,866 - 500 \cdot 0,25}{0,25 + 0,35} = 8,3 \text{ Н}.$$

Из (в) находим $Z_A = G = 200 \text{ Н}$.

Решая (д), получаем

$$X_B = -\frac{P(a + b + c) \sin \alpha}{a + b} = \frac{200 \cdot 0,75 \cdot 0,5}{0,60} = -125 \text{ Н}.$$

Из уравнения (а) и (б), соответственно, имеем:

$$X_A = P \sin \alpha - X_B = -200 \cdot 0,5 + 125 = 25 \text{ Н};$$

$$Y_A = P \cos \alpha - Y_B - Q = 200 \cdot 0,866 - 8,3 - 500 = 335 \text{ Н}.$$

Таким образом, принятые направления X_B и Y_A следует изменить на противоположные.

Контрольные вопросы

1. Какую систему называют парой сил?
2. Какое действие на тело оказывает пара сил?
3. Как определяют модуль и знак момента пары?
4. Каковы свойства пар?
5. Что называется системой сходящихся сил?
6. Как определить равнодействующую системы сил?
7. Каковы условия равновесия системы сходящихся сил?
8. Перечислите последовательность решения задач на равновесие системы сходящихся сил.
9. Что необходимо для равновесия тела в пространстве
10. Назовите три формы уравнений равновесия плоской системы сил.
11. Как выполнить проверку при решении задач на равновесие плоской системы сил

7. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ

7.1. Основные понятия и задачи кинематики

В кинематике изучают движение материальной точки и системы материальных точек, в частности, абсолютно твердого тела независимо от действующих на них сил. Движение, как и покой, - понятие относительное; оно зависит от выбора системы отсчета и изучается в пространстве и времени. *Система координат, связанная с твердым телом, по отношению к которому определяется положение других тел в разные моменты времени, называется системой отсчета* [9].

Следует различать термины - "момент времени" и "промежуток времени".

Промежутком времени называют разность между более поздним и ранним моментом времени. Промежуток времени - всегда положительная величина.

В Международной системе единиц за единицу времени принята секунда (с).

Определить движение точки - это значит задать положение этой точке относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени. Определить движение тела - это значит задать положение каждой точки этого тела относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени. Способов задания движения точки три: *естественный* (задается траектория графически или в виде уравнения); *координатный* (задается закон движения точки в координатной форме, т.е. координаты точки как функции времени); *векторный*.

Геометрическое место положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета называется траекторией точки.

Моментом времени t считают число секунд, определяющее данное мгновение от некоторого, условно принятого начального момента (начала движения). Момент времени может принимать любые значения: *нуль* (начальный момент); *положительные* (моменты, следующие за начальным); *отрицательные* (моменты предыдущие начальному).

Если траектория - прямая линия, движение точки называют *прямолинейным*, если же траектория - кривая линия, то движение называют *криволинейным*.

Расстояние, пройденное точкой за рассматриваемый промежуток времени, измеренное вдоль траектории в направлении движения точки, представляет собой путь точки. Вектор, проведенный из одного положения точки в другое, называется перемещением точки за соответствующий промежуток времени. За единицу расстояния принят метр (м).

Величину, характеризующую быстроту и направление движения тела по траектории с течением времени, называют скоростью движения. Скорость - величина векторная.

В общем случае, если модуль и направление вектора скорости с течением времени изменяются, то движение является *неравномерным* и *криволинейным*. Если модуль и направление вектора скорости не изменяются с течением времени, то движение будет *равномерным* и *прямолинейным*. Возможны и другие частные случаи движения, при которых переменны либо модуль, либо направление вектора скорости. За единицу модуля скорости принимают м/с.

Быстроту изменения скорости по времени называют ускорением движения. Ускорение, как и скорость, является векторной величиной. Единицей измерения ускорения является м/с^2 .

В кинематике рассматриваются две основные задачи:

- 1) получение закона движения точки (тела);
- 2) определение кинематических характеристик движения тела (скорости, ускорения, траектории, пути) по известному закону его движения.

7.2. Простейшие движения твердого тела и точки

Поступательное движение. Поступательным называют такое движение твердого тела, когда все его точки двигаются по траекториям одинаковой формы и в каждый момент времени имеют скорости и ускорения, равные по модулю и направлению.

При поступательном движении любая прямая, соединяющая две точки тела, перемещается параллельно самой себе, а все точки его описывают тождественные траектории. Так, при перемещении твердого тела из положения I в IV (рис. 7.1) прямая AB, соединяющая две его точки A и B, последовательно занимает положения A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 [8].

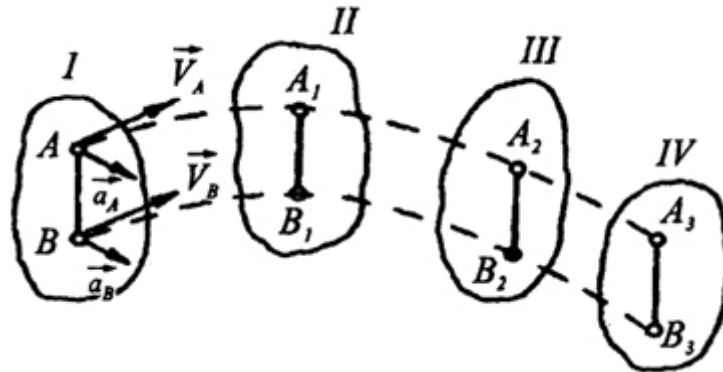


Рис. 7.1. Поступательное движение твердого тела

В зависимости от формы траектории поступательное движение может быть *прямолинейным* или *криволинейным*.

Скорости и ускорения всех точек поступательно движущегося тела по модулю и направлению равны между собой:

$$\vec{V} \rightarrow_A = \vec{V} \rightarrow_B = \dots \vec{V} \rightarrow_n, \quad \vec{a} \rightarrow_A = \vec{a} \rightarrow_B = \dots \vec{a} \rightarrow_n.$$

Следовательно, если все точки движутся одинаково, то изучение поступательного движения тела сводится к изучению движения какой-либо одной из его точек. Чаще всего в качестве этой точки выбирают центр тяжести тела.

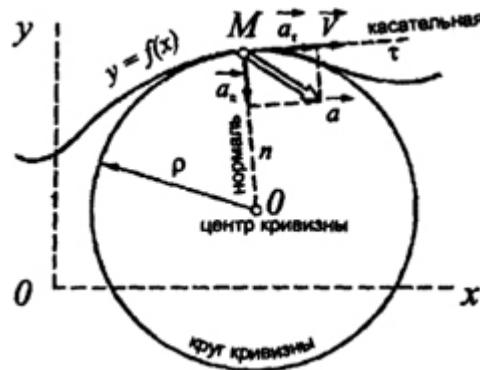
Однако необходимо различать *поступательное движение твердого тела* и *прямолинейное движение точки*. Точки твердого тела, движущегося поступательно, могут описывать любые траектории, в частном случае эти траектории могут быть прямолинейными.

Основные кинематические элементы поступательного движения твердого тела: линейное перемещение s (м), линейная скорость $\vec{V} \rightarrow$ (м/с) линейное ускорение $\vec{a} \rightarrow$ (м/с^2).

В общем случае (рис. 7.2)

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad (7.1)$$

где $a \rightarrow_n$ - нормальное ускорение. Оно характеризует изменение скорости по направлению, $a \rightarrow_\tau$ - тангенциальное ускорение. Оно характеризует изменение скорости по модулю.



7.2. Прямое, нормальное и касательное ускорение точки

Модуль тангенциального ускорения определяется второй производной расстояния по времени:

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = f''(t) \quad (7.2)$$

Вектор $a \rightarrow_\tau$ направлен по касательной к траектории.

Если $a_\tau > 0$ и $V > 0$ или $a_\tau < 0$, $V < 0$, то движение *ускоренное* и вектор $a \rightarrow_\tau$ направлен в сторону вектора скорости (рис. 7.3, а).

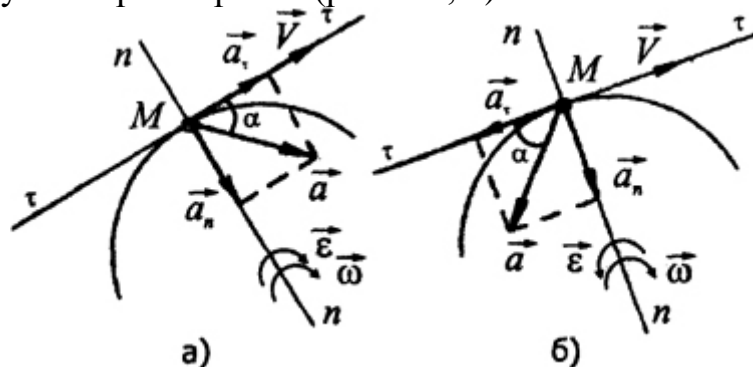


Рис. 7.3. Ускоренное (а) и замедленное (б) движение точки

Если $a_\tau < 0$ и $V > 0$ или $a_\tau > 0$ и $V < 0$, то движение *замедленное* и вектор $a \rightarrow_\tau$ направлен в сторону, противоположную вектору скорости (рис. 7.3, б).

Модуль нормального ускорения равен отношению квадрата модуля скорости к радиусу кривизны в данной точке траектории

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}. \quad (7.3.)$$

Нормальное ускорение всегда положительно и направлено к центру кривизны, поэтому его иногда называют *центростремительным ускорением*.

Частные случаи. 1. Если точка движется прямолинейно и неравномерно, то $\rho = \infty$, и, следовательно, $a_n = 0$, $a = a_\tau$.

2. Если точка движется прямолинейно и равномерно, то $a_n = 0$, $a_\tau = 0$ и $a = 0$.

3. Если точка движется по криволинейной траектории равномерно, то $a_\tau = 0$ и $a = a_n = 0$. При равномерном криволинейном движении точки закон движения имеет вид $s = Vt$. Если же точка совершает равнопеременное криволинейное движение, то

$$V = V_0 + a_\tau t, \quad s = V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2} \quad (7.4, \text{а})$$

причем, если $V > 0$ и $a_\tau > 0$ (или $V < 0$ и $a_\tau < 0$), то движение *равноускоренное*; если $V > 0$, $a_\tau < 0$ (или $V < 0$, $a_\tau > 0$), то движение *равнозамедленное*.

Среднюю скорость при равномернопеременном движении определяют как полусумму начальной и конечной скорости:

$$V_{\text{ср}} = \frac{V_0 + V_\kappa}{2}, \quad (7.4, \text{б})$$

касательное ускорение

$$a_\tau = \frac{V_\kappa - V_0}{t} = \text{const} \quad (7.4, \text{в})$$

Тогда, решая совместно (7.4, а) и (7.4, в) получим

$$S = \frac{V_\kappa^2 - V_0^2}{2a_\tau}.$$

Вращательное движение. Движение твердого тела называют *вращательным*, если в движущемся теле или вне его имеется ось вращения, которая при вращении остается неподвижной, а плоскость, проведенная через эту ось и произвольную точку тела, совершает поворот вокруг оси.

Законом, или уравнением вращательного движения тела вокруг неподвижной оси, называют равенство, при помощи которого задается угол поворота тела φ как функция времени, т.е. $\varphi = f(t)$. Угол поворота измеряется в радианах (рад) - безразмерных единицах. Быстроту и направление вращения тела характеризует угловая скорость ω , равная первой производной по времени от угла поворота:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = f(t).$$

Траекторией любой точки A , принадлежащей вращающемуся телу K и отстоящей от оси вращения O_I на расстоянии r , является

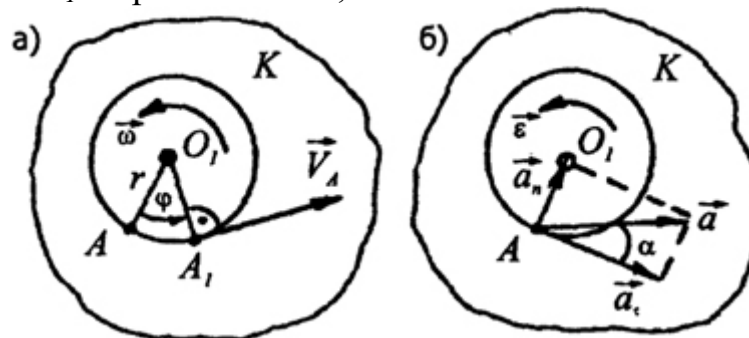


Рис. 7.4. Скорость (а) и ускорение (б) точки вращающегося тела

окружность радиусом r (рис. 7.4). Если за время φ тело повернулось на угол φ и имеет в этот момент времени угловую скорость ω и угловое ускорение ε , то:

а) линейное перемещение точки (длина дуги)

$$S = r\varphi; \quad (7.6)$$

б) ее линейная скорость

$$V = r\omega \quad (7.7)$$

и направлена по касательной к окружности и в сторону вращения. Так как $\omega = \pi n/30$, то для определения линейной скорости на ободе диаметром d часто используют выражение:

$$v = \frac{d \cdot \omega}{2} = \frac{\pi d n}{60}; \quad (7.8)$$

в) тангенциальное (касательное) ускорение

$$a_\tau = r\varepsilon \quad (7.9)$$

по направлению совпадает со скоростью V при ускоренном вращении и противоположно вектору скорости при замедленном вращении;

г) нормальное ускорение

$$a_n = \frac{V^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r \quad (7.10)$$

и всегда направлено по радиусу r к оси вращения;

д) ускорение точки A равно геометрической сумме нормального и касательного ускорений, т.е. $a \rightarrow = a \rightarrow_\tau = a \rightarrow_n$. Модуль ускорения определяют по формуле:

$$a = \sqrt{(\varepsilon r)^2 + (\omega^2 r)^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (7.11)$$

Ускорение отклонено от нормали к траектории на некоторый угол, определяемый из соотношения.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (7.12)$$

Основные кинематические элементы вращательного движения: угловое перемещение φ (рад), угловая скорость ω (с⁻¹), угловое ускорение ε (с⁻²), число оборотов n (об/мин).

Если ω и ε направлены в одну сторону ($\omega > 0, \varepsilon > 0$ или $\omega < 0, \varepsilon < 0$), то вращение *ускоренное*, если направлены в разные стороны $\omega < 0, \varepsilon > 0$ или $\omega > 0, \varepsilon < 0$, то вращение *замедленное*. Отметим, что положительный и отрицательный знаки $\varphi, \omega, \varepsilon$ определяются совпадением или несовпадением их направлений с выбранным направлением отсчета углов поворота.

Частные случаи вращения тела:

1. Если $\omega_0 = \omega = \text{const}$, т.е. $\varepsilon = 0$, то вращение *тела равномерное*. В этом случае $\varphi = \omega_0 t$, где ω_0 - начальная угловая скорость.

2. Если $\varepsilon = \text{const}$, то вращение тела называют *равнопеременным*. В этом случае

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (7.13)$$

Пусть некоторое тело за время t повернулось на угол φ , увеличив свою угловую скорость с начального значения ω_0 до конечного, при этом угловое ускорение составляло ε . Полный угол поворота определим по (7.13) или, введя среднюю угловую скорость $\omega_{cp} = (\omega_k + \omega_0)/2$, из выражения:

$$\varphi = \omega_{cp} t = \frac{(\omega_k + \omega_0)t}{2}.$$

Так как $t = (\omega_k - \omega_0)/\varepsilon$, то угол поворота можно выразить иначе:

$$\varphi = \frac{(\omega_k + \omega_0)(\omega_k - \omega_0)}{2\varepsilon} = \frac{\omega_k^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}. \quad (7.14)$$

7.3. Сложное движение точки

До сих пор рассматривалось движение точки по отношению к одной системе координат, которую считали неподвижной. В мире все находится в непрерывном движении, и неподвижная система координат в действительности не существует. Поэтому нередко возникает необходимость рассматривать движение точек одновременно к двум системам отсчета, одна из которых условно считается неподвижной, а вторая определенным образом движется по отношению к первой. Движение точки в этом случае называется *сложным* [8].

Движение точки по отношению к неподвижной системе координат называется *абсолютным*. Движение точки по отношению к подвижной системе координат называется *относительным*. Движение точки вместе с подвижной системой координат по отношению к неподвижной называется *переносным*.

Для примера рассмотрим движение поднимаемого при помощи крана груза в условиях, когда стрела крана одновременно поворачивается вокруг своей оси. Движущейся системой отсчета в этом случае является стрела крана. Относительно нее груз движется прямолинейно вверх - это относительное движение. Одновременно вместе со стрелой груз совершает движение по дуге окружности относительно "неподвижной" Земли - это переносное движение груза.

Наблюдатель, стоящий на Земле, видит абсолютное движение груза, складывающееся из двух происходящих одновременно движений.

Сложным также является движение человека по движущейся лестнице эскалатора: движение человека по отношению к ступеням является относительным, а перемещение его вместе со ступенями относительно неподвижных стен тоннеля является переносным. Абсолютным будет движение человека относительно неподвижных стен.

Таким образом, абсолютное движение точки - совокупность двух движений: относительного и переносного. При этом различают абсолютную, относительную и переносную траектории и, соответственно, такие же скорости и ускорения точки.

Рассмотрим, как определяют абсолютное движение точки (т. е. абсолютные перемещения, скорость и ускорение), если ее относительное и переносное движения прямолинейны и направлены под углом друг к другу.

Пусть груз M (рис. 7.5) движется по наклонной плоскости и за промежуток времени Δt перемещается относительно нее на $\Delta S_{осн}$. За этот же промежуток времени наклонная плоскость движется прямолинейно, и груз вместе с ней совершает переносное перемещение $\Delta S_{пер}$.

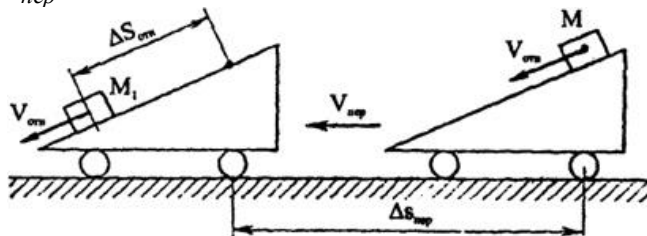


Рис. 7.5. Сложное поступательное движение

Если изобразить эти перемещения в виде векторов $\Delta S_{осн}$ и $\Delta S_{пер}$, направления которых совпадают с направлениями соответствующих движений, то диагональ параллелограмма, построенная

на этих векторах (рис. 7.6, а), будет абсолютным перемещением груза из точки M в точку M_1 .

$$\Delta \vec{S}_{абс} = \Delta \vec{S}_{отн} + \Delta \vec{S}_{пер} \quad (7.15)$$

Зная Δt , в течение которого происходило движение, получим

$$\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{пер} + \vec{V}_{отн} \quad (7.16)$$

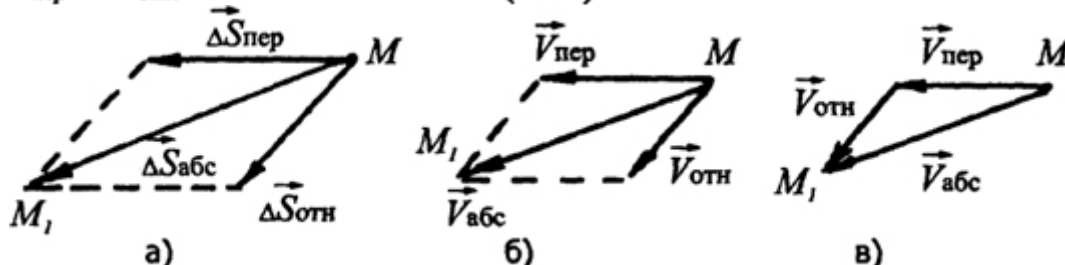


Рис. 7.6. Сложение перемещений (а) и скоростей (б, в) при сложном поступательном движении

Следовательно, в случае, если относительное и переносное движения прямолинейны, абсолютная скорость в каждый момент времени определяется как геометрическая сумма относительной и переносной скоростей. Графически абсолютная скорость точки может быть определена по правилу параллелограмма или треугольника (рис. 7.6, б, в).

Для определения модуля абсолютной скорости можно использовать теорему косинусов:

$$V_{абс} = \sqrt{V_{пер}^2 + V_{отн}^2 + 2V_{пер} \cdot V_{отн} \cdot \cos \alpha}, \quad (7.17)$$

где α - угол между направлениями относительной и переносной скоростей.

При $\alpha = 90^\circ$

$$V_{абс} = \sqrt{V_{пер}^2 + V_{отн}^2} \quad (7.18)$$

89

Аналогичные рассуждения позволяют получить выражение для ускорений:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{отн} \quad (7.19)$$

Но следует помнить, что это выражение справедливо лишь для случая, когда переносное движение является поступательным.

Рассмотрим второй случай, когда сложное движение состоит из относительного вращательного и переносного поступательного. В технике широко встречается один из видов сложного движения тела - *плоскопараллельное движение*. Оно получается в том случае, когда все точки движущегося тела перемещаются в плоскостях, параллельных данной неподвижной плоскости. Таково, например, движение шатуна в кривошипно-ползунном или кривошипно-коромысловом механизме, качение колеса по прямолинейному рельсу и т.д.

Введем понятие **полюса**. *Полюсом называют точку, вокруг которой осуществляется поворот тела.*

На рис. 7.7 показано сложное плоскопараллельное движение тела, состоящее из вращательного вокруг полюса (за него принята точка A) с угловой скоростью ω , и поступательного вместе с полюсом со скоростью $V \rightarrow_2$. Поступательное движение является переносным, вращательное - относительным [4].

Найдем абсолютную скорость любой другой точки тела, например, точки B как геометрическую сумму двух скоростей:

переносной скорости поступательного движения, равной скорости полюса

$$\vec{V}_{\text{пер}} = \vec{V}_A, \text{ и}$$

относительной скорости вращательного движения вокруг полюса

$$\vec{V}_{\text{отн}} = \vec{V}_{BA},$$

(7.20)

$$\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

Причем вектор $\vec{V}_{\rightarrow BA}$ перпендикулярен радиусу вращения AB и направлен в сторону вращения. Модуль относительной скорости

$$\vec{V}_{BA} = AB \cdot \omega.$$

При исследовании механизмов или при решении таких задач обычно в качестве полюса принимают точку, скорость которой в данный момент времени известна

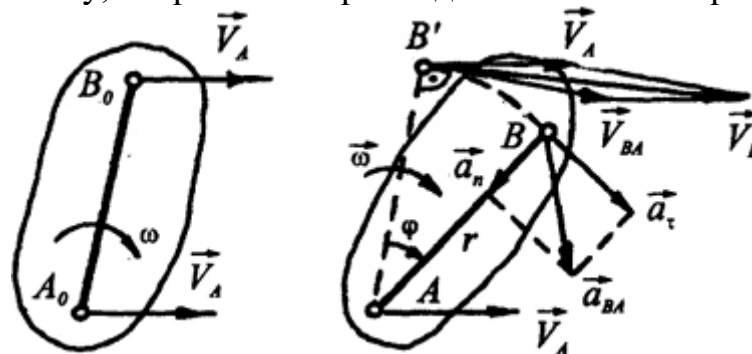


Рис. 7.7. Скорость точки тела совершающего сложное плоскопараллельное движение

Абсолютное ускорение точки A в сложном плоскопараллельном движении равно геометрической сумме переносного и относительного ускорений

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{отн}} \quad (7.21)$$

В случае, когда относительное движение вращательное, ускорение $a_{\text{отн}}$, в свою очередь, состоит из двух ускорений:

- нормального $a_n = \omega^2 r$, направленного вдоль линии BA к центру вращения,
- касательного a_τ , направленного перпендикулярно BA (на рис. 7.7 $a_{\rightarrow \text{отн}} = a_{\rightarrow BA}$).

Таким образом, выражение (7.21) примет вид:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

91

Применительно к рис. 7.7

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{BA}$$

Таким образом: сложное плоскопараллельное движение твердого тела можно разложить на два простых: относительное - вращательное вокруг полюса (точнее, вокруг оси, проходящей через полюс) и переносное - поступательное движение вместе с полюсом и со скоростью полюса.

Следует иметь в виду, что эти два простых движения совершаются одновременно, а не последовательно, как было нами рассмотрено выше.

Контрольные вопросы

1. Какое движение тела называют поступательным? Приведите примеры.
2. Какое движение тела называют вращательным? Приведите примеры вращательного движения.
3. Какие угловые величины характеризуют вращательное движение тела?
4. Как определить угловую скорость и угловое ускорение тела, если известен закон его вращения?
5. Какое вращательное движение называют равномерным и равномерно-переменным?
6. Как определяют угловую скорость при равномерном и равномернопеременном вращении?
7. Какое движение называют ускоренным, а какое - замедленным?
8. Как определяют модули нормального и касательного ускорений точки?
9. Что характеризуют нормальное и касательное ускорения?
10. Как направлены нормальное и касательное ускорения?
11. Дайте определение переносного, относительного и абсолютного движений тела.
12. Как определить величину абсолютной скорости точки тела, если ее относительное и переносное движения прямолинейны?
13. Чему равно абсолютное ускорение тела при сложном вращательно-поступательном движении?

8. КИНЕМАТИКА МЕХАНИЗМОВ

Общие сведения. Кинематический анализ механизмов проводят без учета сил, вызывающих его движение, аналитическим или графическим методом. При этом решают в основном три задачи:

- 1) определение перемещений звеньев и траекторий заданных точек;
- 2) определение скоростей точек звеньев и угловых скоростей звеньев;
- 3) определение ускорений точек звеньев и угловых ускорений звеньев.

Аналитический метод позволяет установить в виде математического уравнения зависимость кинематических параметров механизма от размеров звеньев.

Графический метод, более простой, основан на непосредственном геометрическом построении планов положений, скоростей и ускорений. Он позволяет наглядно представить движение звеньев механизма.

8.1. Построение планов положений звеньев

Рассмотрим построение трех положений звеньев кривошипно-коромыслового механизма (рис. 8.1, а). Исходными данными являются: угол наклона кривошипа l к горизонтальной оси φ ; размеры звеньев (м), $L_{O_1A} = r$, L_{AB} , L_{O_2B} ; расстояние между стойками $L_{O_1O_2}$ (м).

Для построения исходного положения звеньев O_1ABO_2 из произвольно выбранной точки O_1 под углом φ проводим линию и на ней откладываем отрезок l_{O_1A} (мм) произвольной длины. Определяем масштаб плана положений

$$\mu_l = \frac{L_{O_1A}}{l_{O_1A}} \left(\frac{\text{м}}{\text{мм}} \right).$$

Таким образом, в масштабе μ_l , построено положение начального механизма, состоящего из кривошипа 1, вращательной пары O_1 и стойки 4. Так как кривошипно-коромысловый механизм состоит

еще из группы Ассура первого вида (звенья 2-3), строим положение этих звеньев, но уже в выбранном масштабе μ_l . Для этого находим положения точек O_2 и B , предварительно определив с учетом масштаба μ_l расстояние O_1O_2 и длины звеньев AB и O_2B :

$$l_{O_1O_2} = \frac{L_{O_1O_2}}{\mu_l}, \quad l_{AB} = \frac{L_{AB}}{\mu_l}, \quad l_{O_2B} = \frac{L_{O_2B}}{\mu_l} \text{ (мм)}. \quad (8.2)$$

Зная положения точек A и O_2 , методом засечек находим положение точки B . Таким образом, построено исходное положение всех звеньев механизма O_1ABO_2 .

Определим траектории движения точек A и B . Точка A , принадлежащая одновременно кривошипу 1 и шатуну 2, движется по окружности радиуса r . Траекторией точки B является дуга окружности радиуса O_2B . Построение других положений звеньев проводится аналогично. Для этого кривошип O_1A поворачивается на необходимый угол в положение O_1A' или O_1A_0 . Затем определяется положение точек B' и B_0 .

8.2. Построение планов скоростей и ускорений

Наглядное представление о направлении векторов и модулях скоростей и ускорений точек механизма получают при построении планов скоростей и ускорений.

Планом скоростей (ускорений) механизма называется изображение кинематических параметров в виде плоского пучка векторов абсолютных скоростей (ускорений) точек звеньев механизма, где прямые, соединяющие концы лучей, характеризуют их относительные скорости (ускорения).

Построение плана ведут в соответствии с формулой строения механизма: сначала определяют скорости и ускорения точек, принадлежащих начальному механизму, затем присоединенной к нему группы Ассура, следующей присоединенной группы и т.д.

Так как во всех плоских шарнирных механизмах каждое звено совершает плоскопараллельное движение, то для определения скоростей и ускорений различных точек звеньев можно воспользоваться формулами 7.16 и 7.21 и графически решить эти векторные уравнения. Рассмотрим построение планов скоростей и ускорений на примерах кривошипно-коромыслового (рис. 8,1, б, в) и кривошипно-ползунного (рис. 8.2, б, в) механизмов [6].

Кривошипно-коромысловый механизм

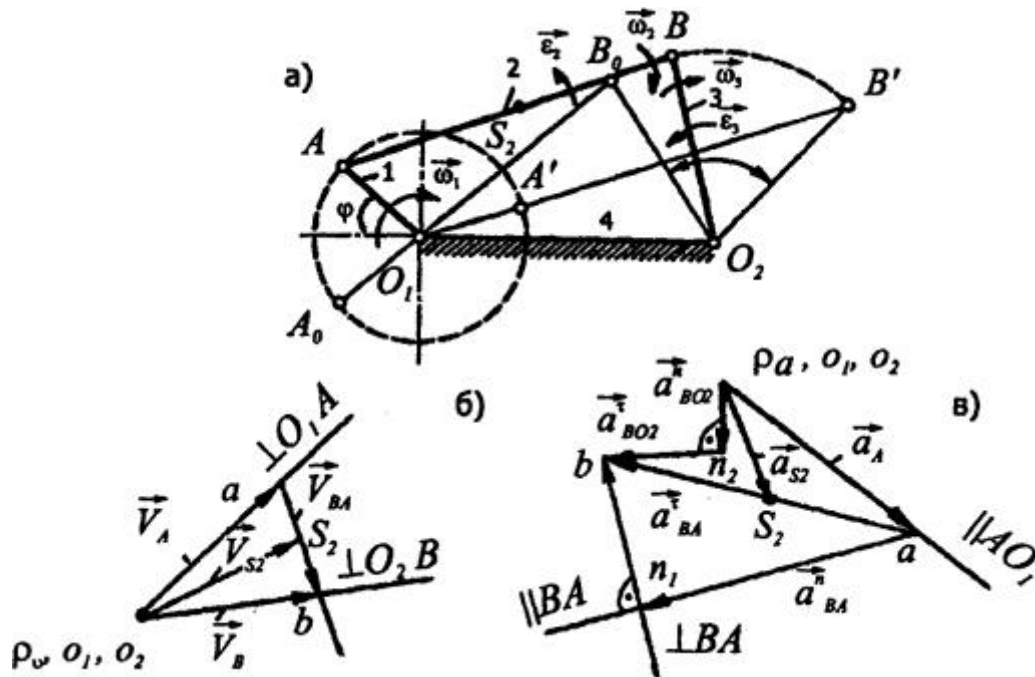


Рис. 8.1. Планы положений (а), план скоростей (б) и ускорений (в) кривошипно-коромыслового механизма

План скоростей. Абсолютная скорость точки $A \vec{V} \rightarrow_a = \omega_1 r$ (r - длина звена O_1A); вектор $A \rightarrow_a \perp O_1A$ и направлен по угловой скорости ω_1 . Выбрав начало отсчета, полюс плана скоростей - точку p_v (рис. 8.1, б), откладываем от нее отрезок $(p_v a)$ в направлении $\vec{V} \rightarrow_a$. Длина отрезка $(p_v a)$ определяет масштаб плана скоростей:

$$\mu_v = V_A / (\rho_v a), \quad (8.1)$$

который показывает, сколько каждый миллиметр чертежа изображает количество единиц скорости; единица этого масштаба (м/с)/мм. Для определения абсолютной скорости точки B рассмотрим движение звена AB как сумму поступательного переносного движения вместе с полюсом \perp - точкой A - и относительного вращательного вокруг полюса A . Векторное уравнение, определяющее абсолютную скорость точки B для рассматриваемого движения, аналогично выражению (7.16) и имеет вид:

$$\vec{V}_B = \underbrace{\vec{V}_A}_{\perp AO_1} + \underbrace{\vec{V}_{BA}}_{\perp BA}. \quad (8.2)$$

В нем векторы, известные по модулю и направлению, подчеркнуты дважды, а векторы, у которых известна только линия действия, подчеркнуты один раз.

Но точка B принадлежит и звену 3 (BO_2). Если рассмотреть его движение и принять за полюс неподвижную точку O_2 , можно получить еще одно уравнение абсолютной скорости точки B :

$$\vec{V}_B = \underbrace{\vec{V}_{O_2}}_{=0} + \underbrace{\vec{V}_{BO_2}}_{\perp BO_2} \quad (8.3)$$

Для графического решения этих уравнений (8.2 и 8.3) из точки a плана (рис. 8.1, б), которая изображает конец вектора $\vec{V} \rightarrow_a$, проводим линию действия вектора $\vec{V} \rightarrow_{BA} \perp AB$, а через полюс p_v плана - линию действия $\vec{V} \rightarrow_B \perp O_2B$. Точка b пересечения этих линий действия определяет отрезок $(p_v b)$ изображающий вектор $\vec{V} \rightarrow_B$. Отрезок (ab) изображает вектор $\vec{V} \rightarrow_{BA}$, направление этого вектора - от точки a к

точке b . Векторный треугольник $\rho_v ab$ - графическое решение исходного уравнения. Модули найденных векторов скоростей:

$$V_B = (\rho_v b) \cdot \mu_v; V_{BA} = (ab) \cdot \mu_v.$$

Угловые скорости звеньев 2 и 3 в их движении относительно точек A и O_2 :

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_2}, \quad \omega_3 = \frac{V_B}{l_3},$$

где $l_2 = L_{AB}$, $l_3 = L_{BO_2}$ - длины соответствующих звеньев. Для определения направления угловых скоростей ω_2 и ω_3 векторы $ab \rightarrow$ и $\rho_v b \rightarrow$ переносим мысленно с плана скоростей на план механизма в точку B и видим, что звено 2 вращается относительно точки A по движению часовой стрелки, а звено 3 относительно точки O_2 также по движению часовой стрелки (рис. 8.1, а).

Свойства плана скоростей. 1. Векторы, идущие из полюса ρ_v плана скоростей, представляют собой в масштабе μ_v абсолютные скорости соответствующих точек механизма; векторы, не проходящие через полюс, есть относительные скорости точек звеньев.

2. Отрезки $(o_1 a)$, (ab) , $(o_2 b)$ на плане скоростей отображают звенья AO_1 , AB и $O_2 B$ механизма. Это означает, что если звено имеет какую-либо дополнительную точку, например, на звене 2 (рис. 8.1, а) точка S_2 (центр масс звена 2), то отображающая ее на плане скоростей точка s_2 (рис. 8.1, б) будет находиться также на середине отрезка (ab) , при этом верно соотношение $ab/as_2 = l_{AB}/l_{AS_2}$. Это вытекает из уравнений:

$$V_{BA} = \omega_2 l_{AB} = \mu_v (ab); V_{S_2 A} = \omega_2 l_{AS_2} = \mu_v \cdot (as_2).$$

Величина абсолютной скорости точки S_2 звена 2 $V_{S_2} = (\rho_v s_2) \cdot \mu_v$.

3. Отображения точек закрепленных шарниров O_1 и O_2 всегда совпадают с полюсом плана скоростей ρ_v .

План ускорений. Исходными данными для построения плана ускорений механизма, показанного на рис. 8.1, а, являются известные

абсолютное ускорение точки A ведущего звена 1 и уже построенный план скоростей (рис. 8.1, б). Ускорение точки A при $\omega_1 = const$ равно ее нормальному ускорению $a_A = a_A = \omega_1 l_{O_1 A}$ и направлено от точки A к точке O_1 . Выбрав полюс ρ_a плана ускорений и масштаб μ_a , откладываем отрезок $(\rho_a a) \parallel O_1 A$, который отображает

$$\mu_a = \frac{a_A}{\rho_a a} \text{ (м/с}^2\text{) / мм.}$$

ускорение a_A ; при этом

Для определения ускорения точки B рассмотрим абсолютное движение звена AB как сумму переносного и относительного движений (см. формулу (7.21):

$$\overline{a_B} = \underbrace{\overline{a_A}}_{\parallel AO_1} + \underbrace{\overline{a_{BA}^n}}_{\parallel BA} + \underbrace{\overline{a_{BA}^t}}_{\perp BA}. \quad (8.4)$$

Вектор нормального ускорения имеет модуль a

$a_{BA}^n = V_{BA}^2 / L_{AB}$ и называется центостремительным, так как направлен по прямой AB от точки B к центру относительного вращения - точке A . Вектор касательного ускорения $\overline{a_{BA}^t}$ перпендикулярен прямой AB . В уравнении (8.4) двумя чертами подчеркнуты ускорения, известные по модулю и направлению, а одной чертой - когда известна лишь линия действия. Так как ни модуль, ни линия действия вектора $a \rightarrow_B$ не известны, а у вектора $\overline{a_B}$ известна только линия действия, то векторное

уравнение (8.4) решить нельзя, поэтому необходимо иметь второе векторное уравнение. Оно может быть получено следующим образом.

Точка B принадлежит одновременно звеньям AB и BO_2 (рис. 8.1, a). Рассматривая движение звена BO_2 и принимая за полюс неподвижную точку O_1 , запишем следующее уравнение абсолютного ускорения точки B :

$$\overrightarrow{a_B} = \underbrace{\overrightarrow{a_{O_2}}}_{=0} + \overrightarrow{a_{BO_2}^n} + \overrightarrow{a_{BO_2}^r} = \underbrace{\overrightarrow{a_{BO_2}^n}}_{\parallel BO_2} + \underbrace{\overrightarrow{a_{BO_2}^r}}_{\perp BO_2} \quad (8.5)$$

где $a_n BO_2 = V^2 / l_3$

l_3 ; вектор $\overrightarrow{a_{BO_2}^n}$ параллелен BO_2 ; линия действия вектора $\overrightarrow{a_{BO_2}^r} \perp BO_2$

Совместное графическое решение векторных уравнений (8.4) и (8.5) дает возможность определить искомый вектор абсолютного ускорения точки B . Обратимся к строящемуся плану ускорений (рис. 8.1, $в$) и векторному уравнению (8.4). Отрезок ($\rho_a a$) представляет собой первое слагаемое векторного уравнения - ускорение $a \rightarrow_A$.

От точки a откладывают отрезок $(an_1) = a \cdot n_{BA} / \mu_a$, изображающий вектор $\overrightarrow{a_{BA}^n}$, который направлен параллельно звену BA от точки B к точке A (так как звено 2 вращается относительно точки A , а вектор $\overrightarrow{a_{BA}^n}$ - центростремительное ускорение).

Далее через конец отрезка (an_1) проводят линию действия $\overrightarrow{a_{AB}^r} \perp AB$. Аналогично графически реализуется уравнение (8.5). На пересечении линий действия векторов $\overrightarrow{a_{BA}^r}$ и $\overrightarrow{a_{BO_2}^r}$ находится искомая точка b ; отрезок ($\rho_a b$) изображает вектор $a \rightarrow_B$; отрезки $(n_1 b)$ и $(n_2 b)$ изображают, соответственно, векторы $\overrightarrow{a_{BA}^r}$ и $\overrightarrow{a_{BO_2}^r}$.

Полученный план ускорений и система уравнений (8.4) и (8.5) взаимно однозначно соответствуют друг другу, т.е. найденное графическое решение удовлетворяет исходным уравнениям. Стрелки векторов на плане ускорений должны быть поставлены в соответствии с векторными уравнениями.

Свойства плана ускорений аналогичны свойствам плана скоростей. Отрезки $(o_1 a)$, (ab) и $(o_2 b)$ выражающие ускорения звеньев при их вращательном движении, отображают соответствующие звенья механизма $O_1 A$, AB и $O_2 B$. Следовательно, если на звеньях имеются дополнительные точки, например, на звене 2 точка S_2 , то ее отображение s_2 на плане ускорений (рис. 8.1, $в$)

находится на середине отрезка (ab) с учетом соблюдения условия $ab/as_2 = L_{AB}/L_{AS_2}$.

Угловые ускорения звеньев в их относительном вращательном движении можно найти, используя соответствующие касательные ускорения из плана ускорений. Например,

$$\varepsilon_2 = \overrightarrow{a_{BA}^r} / L_{AB}; \quad \varepsilon_3 = \overrightarrow{a_{BO_2}^r} / L_{BO_2}.$$

Для определения направления углового ускорения ε_2 звена AB переносим вектор $\overrightarrow{a_{BA}^r}$ точку B (рис. 8.1, a) на плане механизма и видим, что вектор поворачивает звено вокруг точки A против движения часовой стрелки. Следовательно, ω_2 направлено в ту же сторону. Сопоставляя направления ω_2 и ε_2 , заключаем, что звено 2 дви-

жется относительно точки A замедленно. Аналогично определяем направление ускорения ε_3 звена O_2B и характер его движения.

Кривошипно-ползунный механизм. Для заданного положения механизма (рис. 8.2, а) при постоянной угловой скорости ω_1 входного звена I план скоростей (рис. 8.2, б) построен согласно уравнению:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

а план ускорений (рис. 8.2, в) - согласно уравнению

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^r$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^r$$

где V_B - абсолютная скорость точки B (параллельна оси направляющей $x - x$); V_A - абсолютная скорость точки A ; V_{BA} - вращательная скорость точки B относительно точки A ; a_b - абсолютное ускорение точки B (параллельно $x - x$); a_a - абсолютное (нормальное) ускорение точки A , $a_A = a_n A$

($\omega_1 = \text{const}$); $a_n A = V_A^2 / l_1$ (m/c_2) и τ_{BA}

- касательное ускорение точки B относительно точки A .

Поступательная пара ползун 3 - стойка 4 определяет линии действия скорости V_B и ускорения a_B , поэтому в отличие от четырехшарнирного механизма для построения плана ускорений здесь достаточно одного векторного уравнения. Скорость и ускорение точки M найдены на основании второго свойства плана скоростей методом подобия:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{am}{ab}, \text{ откуда } am = \frac{AM \cdot ab}{AB}.$$

Угловые скорости и ускорение шатуна 2:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{BA}}; \quad \varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^r}{l_{BA}}.$$

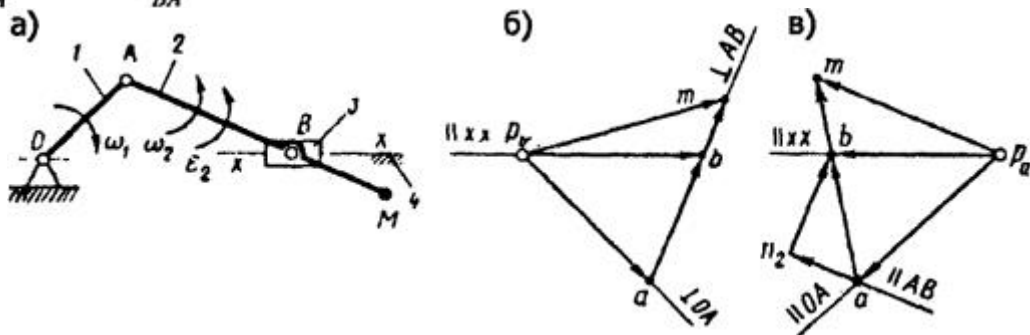


Рис. 8.2. Кинематическое исследование кривошипно-ползунного механизма

Контрольные вопросы

1. Какие задачи решают при кинематическом исследовании механизмов?
2. На чем основан графический метод?
3. Что называют планом скоростей?
4. Какая точка при графическом исследовании механизмов принимается за полюс?
5. Перечислите свойства плана скоростей.
6. Как при помощи планов скоростей и ускорений определить направления угловых скоростей и ускорений звеньев?

9. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О МЕХАНИЗМАХ

9.1. Шарнирно-рычажные механизмы

Шарнирно-рычажными называют механизмы, состоящие из звеньев-рычагов, соединенных низшими кинематическими парами (шарнирами). Такие механизмы могут быть пространственными и плоскими. Простейшие шарнирно-рычажные механизма состоят из четырех звеньев: трех подвижных (ведущего и структурной группы, состоящей из двух звеньев) и неподвижного звена-стойки. Подвижное звено, соединенное со стойкой и вращающееся относительно нее на 360° , называют *кривошипом*, а звено, качающееся относительно стойки, - *коромыслом*. Звено, соединяющее подвижные звенья, соединенные кинематическими парами со стойкой, и совершающее сложное движение, называют *шатунном*, подвижную направляющую - *кулисой*; звено, движущееся по направляющей, - *ползуном*.

На рис. 9.1 приведены наиболее распространенные плоские четырехзвенные шарнирно-рычажные механизмы: кривошипно-ползунный механизм, применяемый для преобразования вращательного движения кривошипа в поступательное ползуна или поступательного движения ползуна во вращательное кривошипа (рис. 9.1, а); кулисный механизм, служащий для преобразования вращательного движения кривошипа в качательное кулисы или вращательного равномерного кривошипа во вращательное неравномерное кулисы (рис. 9.1, б); шарнирный четырехзвенник, преобразующий вращательное движение кривошипа в качательное или вращательное коромысла (рис. 9.1, в) [6].

Шатуны шарнирно-рычажных механизмов также используют для получения движения по заданному закону или перемещения какой-либо его точки по заданной траектории, называемой *шатунной кривой*.

Шарнирные механизмы нашли самое широкое применение в двигателях внутреннего сгорания, сельскохозяйственных машинах, снегоуборочной технике, швейных машинах и т.д.

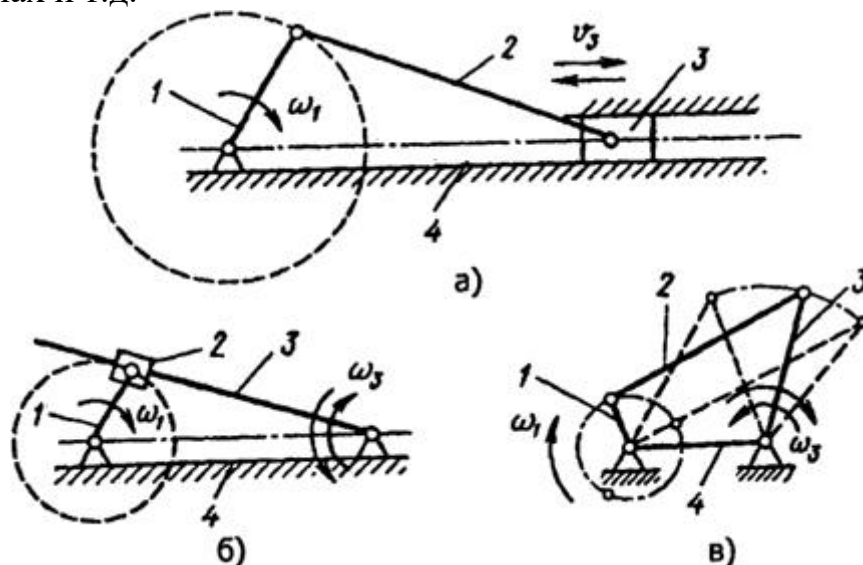


Рис. 9.1. Шарнирно-рычажные механизмы а - кривошипно-ползунный, б - кулисный, в - кривошипно-коромысловый

9.2. Механизмы прерывистого движения

На рис. 9.2. изображен *мальтийский механизм*, преобразующий непрерывное вращение ведущего звена - кривошипа 1 с пальцем или роликом *B* на конце в прерывистое вращение ведомого звена - мальтийского креста 2, имеющего радиальные пазы (название возникло от сходства ведомого звена с эмблемой духовно-рыцарского Мальтийского ордена).

Вращение мальтийского креста происходит при повороте кривошипа на угол φ_p ; остальная часть оборота кривошипа на угол φ_x соответствует остановке ведомого звена 2. Неподвижное положение мальтийского креста фиксируется его сегментными вырезами *A*, по которым скользит диск 3, жестко связанный с кривошипом 1. Число пазов мальтийского креста бывает в пределах от 3 до 12.

Мальтийские механизмы применяют в металлообрабатывающих станках, пишущих машинах, кинопроекторных аппаратах, приборах точной механики и др.

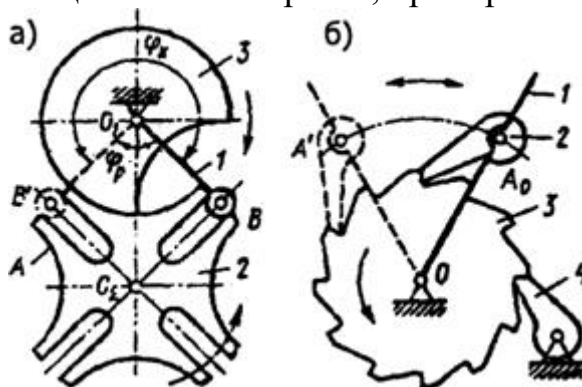


Рис. 9.2. Механизмы прерывистого движения: а - мальтийский, б - храповый

На рис. 9.2, б показан один из видов *храпового механизма*. Такой механизм преобразует возвратно-качательное движение ведущего звена - рычага 1 с рабочей собачкой 2 в прерывистое одностороннее вращательное движение ведомого звена 3, называемое храповым колесом. При возвращении рычага и рабочей собачки в исходное положение храповое колесо остается неподвижным. Для предотвращения его поворота в обратном направлении предусмотрена стопорная собачка 4.

Храповые механизмы применяют в грузоподъемных машинах, механизмах завода пружин, пишущих машинах, в механизмах подачи автоматических линий и т.д.

9.3. Кулачковые механизмы

Кулачковые механизмы предназначены для преобразования движения входного звена, обычно вращающегося кулачка, в заданный вид движения выходного звена (*толкателя* или *коромысла*). Преимущественно применяются плоские кулачковые механизмы.

Рассмотрим устройство и принцип действия простейшего механизма (рис. 9.3).

При вращении кулачка 4 с угловой скоростью ω толкатель 3 совершает определенное возвратно-поступательное движение относительно стойки 2. Постоянный контакт толкателя с кулачком

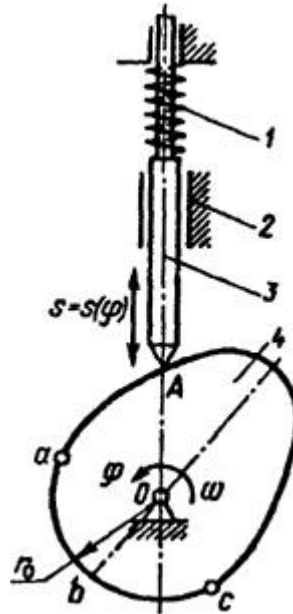


Рис. 9.3. Плоский кулачковый механизм с точечным толкателем

обеспечивается пружиной 1. Это трехзвенный механизм с двумя низшими (кулачок - стойка, толкатель - стойка) и одной высшей (кулачок - толкатель) кинематическими парами. Степень свободы механизма по формуле Чебышева для плоских механизмов:

$$W = 3(3 - 1) - 2 \cdot 2 - 1 = 1$$

Кулачковые механизмы дают возможность легко воспроизвести требуемую функцию $S = S(\varphi)$ положения выходного звена, если придать кулачку соответствующий профиль (φ - угол поворота кулачка). Например, толкатель 3 (рис. 9.3) может двигаться с периодическими остановками при непрерывном вращении кулачка 4. Для этого часть профиля abc выполняют в виде дуги окружности с центром в точке O . Когда острие A соприкасается с дугой abc , толкатель остановится, так как в этом случае радиус-вектор $OA = r_0 = \text{const}$. Благодаря подобным качествам кулачковые механизмы получили широкое применение в приборах и особенно в машинах-автоматах для привода рабочих органов, а также программного управления.

Плоские кулачковые механизмы. Рассматривая схемы (рис. 9.4, а-д) наиболее широко применяемых плоских кулачковых механизмов, нетрудно заметить, что движение кулачка 4 и толкателя 3 или коромысла 5 может быть возвратно-поступательным, вращательным или сложным (на схемах вид возможного движения звеньев показан стрелками) [6].

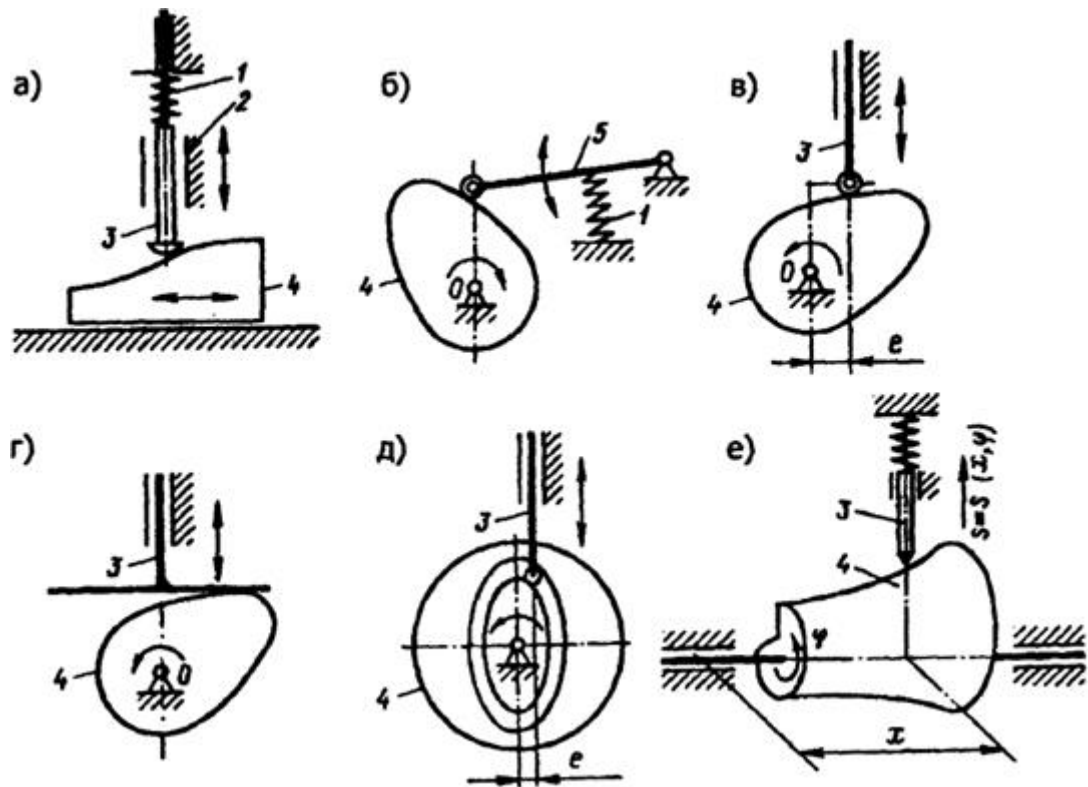


Рис. 9.4. Схемы кулачковых механизмов

Для нормального действия кулачковых механизмов необходим постоянный контакт кулачка с ведомым звеном. Такой контакт достигается в результате их *силового* или *геометрического замыкания*. Силовое замыкание в большинстве случаев обеспечивается пружиной 1 (рис. 9.4, а, б), а геометрическое (рис. 9.4, д) - с помощью паза в кулачке, который направляет движение ролика толкателя.

Звенья кулачкового механизма (кулачок и толкатель) при движении скользят одно по другому, что вызывает их износ. При этом наибольшему износу подвержен остrokонечный толкатель (рис. 9.4, е). В целях уменьшения износа часто в качестве промежуточного звена вводят ролик (см. рис. 9.4, б, в, д), который перекачивается по кулачку. Однако при большой угловой скорости кулачка ролик может перекачиваться со скольжением. Поэтому в некоторых случаях целесообразно оформить толкатель в виде "грибка" (рис. 9.4, а) или придать ему вид плоской тарелки 3 (рис. 9.4, з).

Кулачковые механизмы, предназначенные для преобразования вращательного движения кулачка в возвратно-поступательное движение толкателя, бывают *центральные* и *смещенные*, или *дезаксиальные*. *Центральным* называют такой кулачковый механизм, у которого линия действия вектора скорости толкателя проходит через центр вращения кулачка (рис. 9.4, з). Если же линия действия скорости толкателя проходит на некотором расстоянии e от оси вращения кулачка (рис. 9.4, в, д), то механизм называется *смещенным*; смещение e принято называть *эксцентриситетом* механизма.

Пространственные кулачковые механизмы. Наибольшее применение они нашли в счетно-решающих устройствах и машинах-автоматах. На рис. 9.4, е приведена схема коноидного механизма с толкателем, который имеет две степени свобо-

ды: перемещение s толкателя l является функцией двух независимых переменных φ и $x(\varphi$ - угол поворота коноида 2).

Основным достоинством кулачковых механизмов является возможность с их помощью воспроизвести широкий класс законов движения, удовлетворяющих определенным условиям, в том числе движение с остановками. Кулачковые механизмы просты по конструкции и имеют сравнительно высокий КПД.

К недостаткам кулачковых механизмов относятся: большие давления в месте контакта высшей пары, из-за чего механизм может передавать лишь сравнительно малые усилия; большие динамические нагрузки при больших скоростях; высокая трудоемкость изготовления кулачков со сложным профилем.

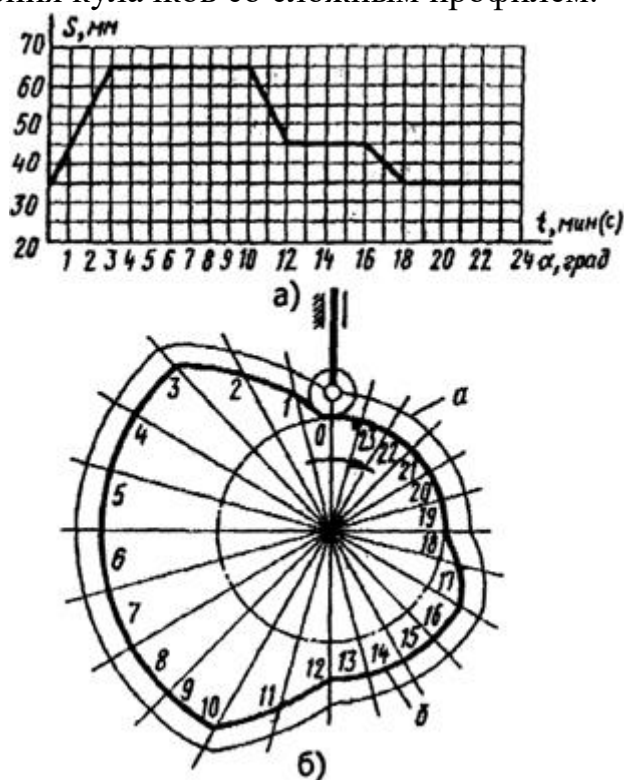


Рис. 9.5. Диаграмма перемещений толкателя (а) и схема построения по ней профиля кулачка (б)

Диаграммы перемещений толкателя. Обычно закон движения толкателя плоского кулачкового механизма, заданный технологическим процессом, выражается зависимостью между ходом толкателя и углом (или временем) поворота кулачка. Эта зависимость, заданная в графической форме, называется *диаграммой перемещений толкателя*. Пусть дана диаграмма (рис. 9.5, а), по которой надо построить профиль кулачка. На оси абсцисс отложены углы поворота или пропорциональное им время поворота кулачка, а на оси ординат - соответствующие им расстояния конца толкателя от оси вращения кулачка. Построение осуществляется в следующем порядке: проводится окружность (рис. 9.5, б) и делится на равные части, соответствующие углам (или времени) поворота кулачка, отображенным на диаграмме; лучи (радиусы), проходящие через точки деления, нумеруются и на них откладываются соответствующие расстояния, взятые с диаграммы; концы полученных отрезков соединяются. Полученный контур и является профилем a кулачка. Часто для уменьшения трения толкателя о кулачок на конце толкателя укрепляют ролик. В этом случае построенный профиль a соответствует движению оси ролика,

а окончательный профиль \bar{b} , все точки которого расположены ближе к центру кулачка, будет подобным ему [4].

9.4. Механизмы передач

9.4.1. Классификация механических передач

Из школьного курса физики известно, что мощность P при равномерном вращении прямо пропорциональна произведению вращающего момента T на угловую скорость ω или частоту вращения n . Следовательно, могут существовать несколько двигателей одного типа (например, электрических), имеющих одну и ту же мощность, но отличающихся вращающим моментом и угловой скоростью (или частотой вращения). В большинстве случаев целесообразнее использовать быстроходные двигатели (с большой угловой скоростью): у них меньшие габаритные размеры и более высокий к. п. д., однако вращающий момент на валу небольшой.

Для выполнения полезной работы угловая скорость вала машины-орудия, как правило, должна быть значительно ниже угловой скорости вала двигателя, но вращающие моменты требуются большие. Поэтому очевидно, что в большинстве случаев непосредственная связь валов двигателя и рабочей машины невозможна и между ними необходимо расположить механизм для преобразования вращающих моментов и угловых скоростей, который носит название *механической передачи*.

Механические передачи классифицируют:

по взаимному расположению ведущего и ведомого валов в пространстве - передачи между валами, геометрические оси которых параллельны, пересекаются или скрещиваются;

по принципу передачи движения - передачи трением и передачи зацеплением;

по способу контакта между ведущим и ведомым звеньями - передачи с непосредственным касанием и передачи с гибкой связью.

Передачи характеризуются передаточным отношением i или передаточным числом u .

9.4.2. Передаточное отношение. Передаточное число

Важнейшей характеристикой любой передачи является передаточное отношение

Передаточным отношением i называется взятое со своим знаком отношение угловой скорости ведущего звена ω_1 к угловой скорости ведомого звена ω_2 .

То есть, передаточное отношение показывает, во сколько раз угловая скорость ω или частота вращения n ведущего вала передачи больше или меньше угловой скорости (или частоты вращения) ее ведомого вала. Если обозначить параметры ведущего звена передачи индексом 1, а ведомого - индексом 2, то передаточное отношение:

$$i_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{n_1}{n_2}. \quad (9.1)$$

Если направления угловых скоростей совпадают, то передаточное отношение берется со знаком "+" (рис. 9.6, б), если не совпадают (рис. 9.6, а) - со знаком "-".

Передаточное отношение в передачах различных типов (фрикционной, ременной, зубчатой, червячной), о чем будет сказано далее, выражаются через отноше-

ния диаметров дисков (катков), шкивов, чисел зубьев зубчатых колес, т.е. соответствующих параметров ведущего и ведомого звеньев (конструктивных элементов) передач:

$$i_{12} = \pm \frac{d_2}{d_1} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{Z_2}{Z_1} \quad (9.4)$$

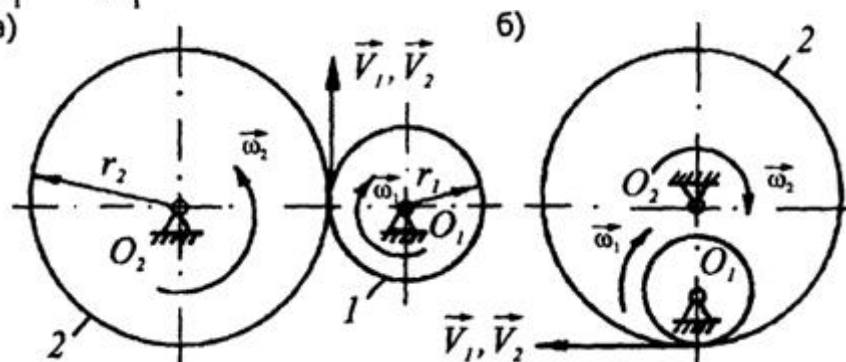


Рис. 9.6. Передачи с отрицательным (в) и положительным (б) передаточным отношением

Передаточное отношение может быть больше (меньше) или равно единице ($\omega_1 < \omega_2$).

Передаточное отношение любого механизма зависит от того, какое из звеньев принято в качестве ведущего. Следовательно, передаточное отношение характеризует механизм при определенном направлении передачи энергии. Более общей характеристикой механизмов, предназначенных для преобразования вращательного движения, является *передаточное число*.

Передаточным числом двух сопряженных звеньев называется отношение большей угловой скорости к меньшей. Иначе, передаточное число - взятое по модулю передаточное отношение, равное или большее единицы.

$$u = \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}}, \quad (9.3)$$

$$u = \max [|i_{21}|; |i_{12}|] \geq 1. \quad (9.4)$$

В отличие от передаточного отношения параметр u не зависит от направления потока энергии и выбора входного звена, а показывает лишь, во сколько раз механизм способен изменить угловую скорость. Передаточное число не содержит информации о взаимном направлении угловых скоростей и о том, уменьшается или увеличивается скорость.

С помощью формул (9.1)-(9.3) решают задачи кинематики в основном для механизмов с постоянным передаточным отношением.

9.4.3. Преобразование вращающих моментов в передачах [4]

Как уже было отмечено, между двигателем и машиной-орудием обычно необходима механическая передача. Если для упрощения не учитывать потери энергии в передаче (ее в таком случае называют идеальной), то подводимую и отводимую мощности можно считать равными. Присвоив ведущему валу передачи, связанному с двигателем, индекс 1, а ведомому, связанному с машиной-орудием, индекс 2,

можно это равенство записать так: $P_1 = P_2$; отсюда $T_1\omega_1 = T_2\omega_2$ (или $T_1n_1 = T_2n_2$), следовательно, $T_2 / T_1 = \omega_1 / \omega_2$ (или $T_2 / T_1 = n_1 / n_2$). Поскольку правые части двух последних выражений являются передаточным числом, то можно сделать вывод, что

$$u_{1-2} = T_2 / T_1.$$

Следовательно, в идеальной передаче (без потерь энергии) изменение угловой скорости (или частоты вращения) обратно пропорционально изменению вращающих моментов.

Обычно бывает нужно определить момент T_2 на ведомом валу передачи при известном моменте T_1 на ведущем валу и передаточном отношении u_{1-2} . Очевидно, что без учета потерь энергии $T_2 = T_1 u_{1-2}$. С учетом этих потерь, $T_2 = T_1 u_{1-2} \mu$, где μ - к. п. д. передачи.

При $u_{1-2} > 1$ передача называется понижающей (редуктором). В этом случае $\omega_2 < \omega_1$; $n_2 < n_1$; $T_2 > T_1$. При $u_{1-2} < 1$ передача называется повышающей (мультипликатором). В этом случае $\omega_2 > \omega_1$; $n_2 > n_1$, $T_2 < T_1$.

9.4.4. Фрикционные передачи [7]

Фрикционными называют передачи, в которых энергия от входного звена к выходному передается силами трения. Применяются передачи как с постоянным передаточным отношением (рис. 9.7, а, в),

112

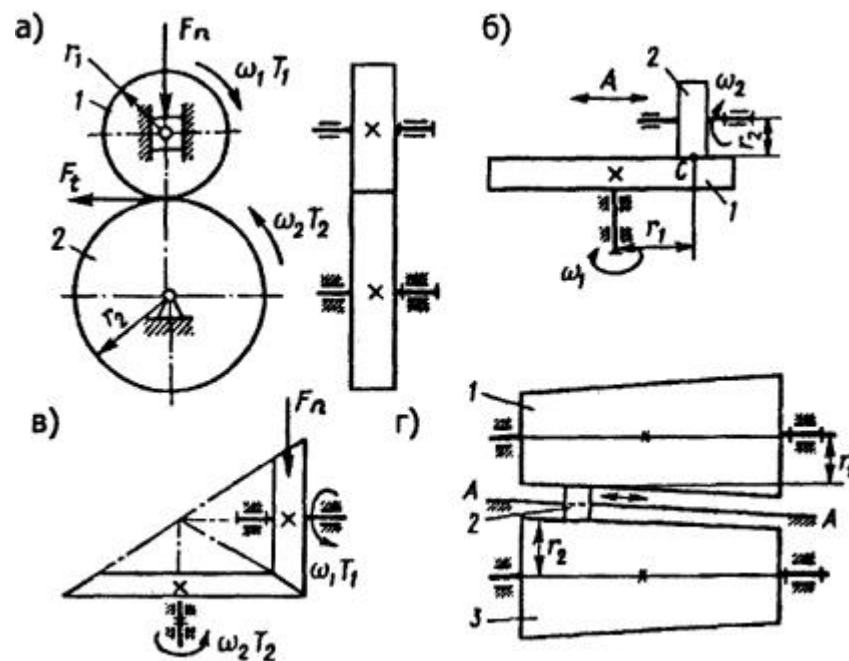


Рис. 9.7. Фрикционные передачи

так и фрикционные вариаторы, которые обеспечивают плавное изменение передаточного отношения (рис. 9.7, б, г).

Окружная сила, которой может быть нагружена фрикционная передача для ее нормальной работы (без буксования), должна быть меньше силы трения, возникающей в зоне контакта.

$$F_t < F_f; F_f = f \cdot F_n; F_t < f \cdot F_n, \quad (9.5)$$

где F_t - окружная сила,

F_f - сила трения,

F_n - сила нормального давления,

f - коэффициент трения.

То есть для работы без проскальзывания в *таких* передачах должно соблюдаться условие

$$F_n > F_t / f$$

Передаточное отношение фрикционной передачи выражается через отношение диаметров ведомого и ведущего дисков (катков).

С учетом упругого и кинематического скольжения передаточное отношение для фрикционных передач

$$i_{12} = \pm \frac{d_2}{d_1(1-\varepsilon)}, \quad (9.6)$$

где d_1 и d_2 - диаметры катков (шкивов);

ω - коэффициент скольжения. Для силовых передач $\omega = 2 \dots 6 \%$, для кинематических механизмов $\omega = 0,1 \dots 2 \%$.

Работа вариаторов (рис. 9.7, б, г) характеризуется диапазоном регулирования:

$$D = \frac{\omega_{2\max}}{\omega_{1\min}} = \frac{i_{\max}}{i_{\min}}. \quad (9.7)$$

Для большей части вариаторов $D \leq 4$, для некоторых $D = 12 \dots 14$.

На рис. 9.7, б показан лобовой вариатор, в котором бесступенчатое регулирование угловой скорости и достигается изменением величины 2.

$$D = \frac{r_{1\max}}{r_{1\min}}.$$

В вариаторе, представленном на рис. 9.7, г, передаточное отношение регулируется одновременным изменением радиусов как ведущего, так и ведомого звеньев путем перемещения промежуточного ролика 2:

$$i_{\max} = \frac{\omega_{1\max}}{\omega_{2\min}} = \frac{r_{2\max}}{r_{1\min}(1-\varepsilon)}; \quad i_{\min} = \frac{\omega_{1\min}}{\omega_{2\max}} = \frac{r_{2\min}}{r_{1\max}(1-\varepsilon)}. \quad (9.8)$$

При симметричном регулировании, когда $r_{1\max} = r_{2\max}$ и $r_{1\min} = r_{2\min}$:

$$D = r_{2\max}^2 / r_{1\min}^2 = i_{\max}^2 \quad (9.9)$$

9.4.5. Ременные передачи

Передача механической энергии, осуществляемая гибкой связью посредством трения между ремнем и шкивом, называется ременной. Она состоит из двух или большего числа шкивов и бесконечного ремня, надетого на шкивы с натяжением.

В зависимости от формы поперечного сечения ремня различают следующие виды ременных передач: *плоскоремные* с прямоугольным профилем поперечного сечения ремня (рис. 9.8, а); *клиноремные* с трапецевидным профилем поперечного сечения ремня (рис. 9.8, б); *поликлиноремные* с бесконечными плоскими ремнями, имеющими продольные клиновые выступы-ребра на внутренней поверхности ремня, входящие в кольцевые клиновые канавки шкивов (рис. 9.8, в); *круглоремные* с круглым профилем поперечного сечения ремня (рис. 9.8, г). Кроме указанных видов ременных передач, широкое применение получили и передачи с *зубчатыми* ремнями, обеспечивающие постоянство передаточного отношения и хорошую тяговую способность.

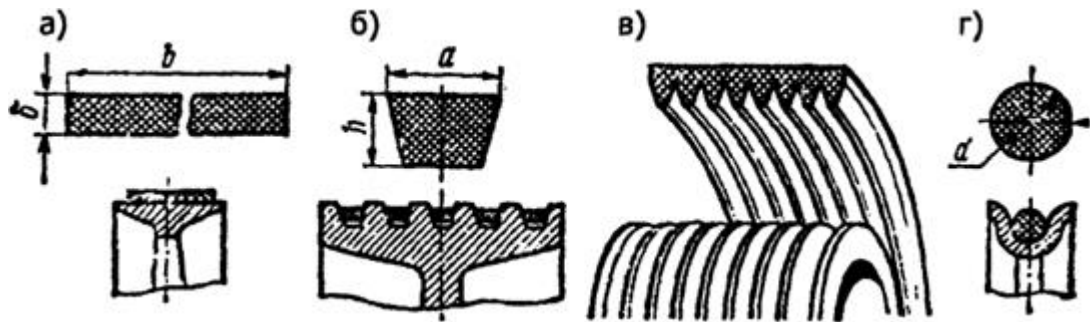


Рис. 9.8. Типы ремней

Рассмотрим работу плоскоременной передачи, схематически изображенную на рис. 9.9.

Передача плоским ремнем (*плоскоременная*) состоит из двух гладких шкивов и охватывающего их ремня (рис. 9.9). Шкивы жестко закреплены на ведущем и ведомом валах. Натяжение ремня обеспечивает на участках контакта со шкивами возникновение сил трения. При вращении ведущего шкива 1 за счет сил трения дополнительно

натягивается одна из ветвей ремня, называемая ведущей; опять же ввиду наличия сил трения она вращает ведомый шкив 2 .

Для определения передаточного отношения ременной передачи условно представим, что ремень не вытягивается и не проскальзывает на шкивах. Такое допущение значительно упростит наши рассуждения и не внесет существенной погрешности в расчеты. Как известно, линейная скорость ($м/с$) любой точки, лежащей на поверхности вращающегося тела (в нашем случае ведущего шкива), $V_1 = \pi D_1 n_1 / 60$ или $V_1 = \omega_1 D_1 / 2$, где D_1 - диаметр шкива, $м$; n_1 - частота вращения, $об/мин$; ω_1 - угловая скорость, $рад/с$. Следовательно, и любая точка ремня, совпадающая с рассматриваемой точкой ведущего шкива, движется с той же линейной скоростью, а значит, и те точки ремня, которые контактируют с ведомым шкивом, и совпадающие с ними точки самого ведомого шкива имеют ту же линейную скорость [4].

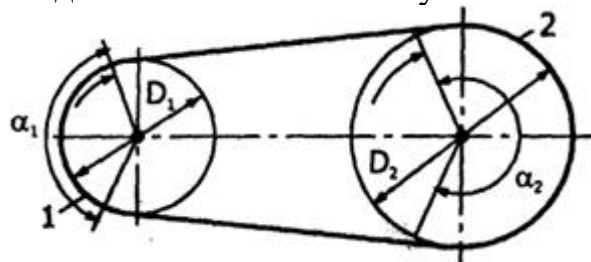


Рис. 9.9. Схема ременной передачи

Линейная скорость любой точки ведомого шкива определяется из выражений $V_2 = \pi D_2 n_2 / 60$ или $V_2 = \omega D_2 / 2$.

Сопоставив формулы линейных скоростей точек ведущего и ведомого шкивов, получим

$$D_1 n_1 = D_2 n_2 \text{ или } D_1 \omega_1 = D_2 \omega_2,$$

$$\text{а значит, } n_1 / n_2 = D_2 / D_1 \text{ или } \omega_1 / \omega_2 = D_2 / D_1$$

Так как левые части выражений являются передаточным отношением, то можно сделать вывод, что без учета проскальзывания ремня по шкивам передаточное отношение ременной передачи

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = D_2 / D_1 = u_{12}. \quad (9.10)$$

Следовательно, *передаточное отношение ременной передачи выражается через отношение диаметров ведомого и ведущего шкивов.*

Углы α_1 и α_2 (см. рис. 9.9), соответствующие дугам, по которым касаются ремень и шкив, называют *углами обхвата*. Поскольку ременная передача передает вращение за счет сил трения между ремнем и шкивом, ее работоспособность существенно зависит от углов обхвата, определяющим из которых является угол обхвата на меньшем шкиве. Его величина в первую очередь зависит от расстояния между центрами шкивов (межосевого расстояния) и передаточного отношения. Практика показала, что передача работает нормально, если угол обхвата не меньше 120° . Это требование выполняется, если соблюдаются следующие условия: $(1/3) \leq i_{1-2} \leq 3$; межосевое расстояние не меньше удвоенной суммы диаметров шкивов ($a_w = 2(D_1 + D_2)$). Можно обеспечить работоспособность плоскоременной передачи и при больших передаточных отношениях, применив натяжной ролик (рис. 9.10), который увеличивает угол обхвата на меньшем шкиве.

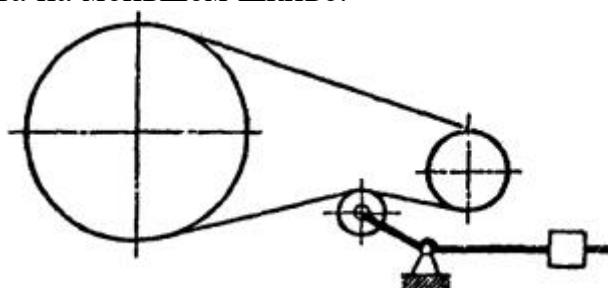


Рис. 9.10. Схема ременной передачи с натяжным роликом

Более совершенным видом передачи движения гибкой связью является передача клиновым ремнем (клиноременная). На ободе шкива сделаны канавки, в которые входит ремень, имеющий в поперечном сечении форму трапеции (рис. 9.8, б). В этих передачах полезная нагрузка передается за счет сил трения между боковыми поверхностями ремня и канавок шкива. Трапециевидное сечение ремня за счет заклинивания увеличивает его сцепление со шкивом и повышает тяговую способность передачи.

На кинематических схемах ременные передачи имеют соответствующее условное обозначение (рис. 9.11).

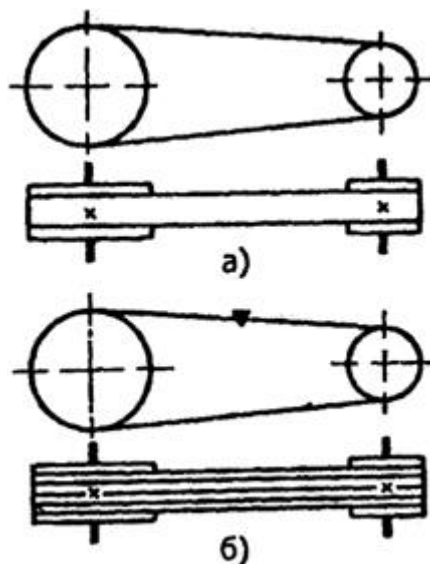


Рис. 9.11. Условные обозначения передач плоским (а) и клиновым (б) ремнями

В последнее время стали широко применять передачи зубчатыми ремнями (зубчато-ременные). На рабочей поверхности ремня имеются выступы - зубья, которые входят в зацепление с аналогичными зубьями на шкивах. Такие передачи работают без скольжения, чем обеспечивается постоянство передаточного отношения.

В некоторых случаях применяют более сложную ременную передачу - многоступенчатую (рис. 9.12) состоящую из нескольких ступеней (пар шкивов). Передаточные отношения отдельных ступеней (i_{1-2} , i_{3-4} , i_{5-6}) выражаются через отношения диаметров ведомых (D_2 , D_4 , D_6) и ведущих (D_1 , D_3 , D_5) шкивов. Применительно ко всей передаче D_1 - это диаметр ведущего шкива, а D_6 - ведомого, однако их отношение не будет искомым передаточным отношением всей передачи, так как эти шкивы не связаны единым ремнем. Определим требуемое соотношение, приняв во внимание, что ведущий вал (не шкив) каждой последующей ступени одновременно является ведомым валом предыдущей.

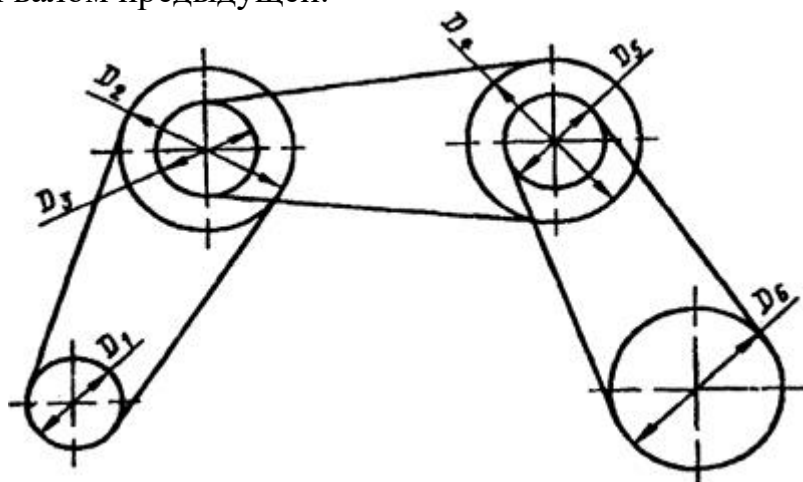


Рис. 9.12. Схема многоступенчатой ременной передачи

Передаточное отношение первой пары шкивов

$$i_{1-2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1}, \text{ откуда } n_2 = \frac{n_1 D_1}{D_2}.$$

Передаточное отношение второй пары шкивов

$$i_{3-4} = \frac{n_3}{n_4} = \frac{D_4}{D_3}$$

Так как шкивы диаметрами D_3 и D_2 закреплены на одном валу, $n_3 = n_2$, следовательно, частота вращения

$$n_4 = \frac{n_2 D_3}{D_4}$$

Передаточное отношение третьей пары шкивов

$$i_{5-6} = \frac{n_5}{n_6} = \frac{D_6}{D_5}, \text{ а } n_5 = n_4, \text{ следовательно } n_6 = \frac{n_4 D_5}{D_6}.$$

Передаточное отношение всей передачи

$$\begin{aligned} i_{1-6} &= \frac{n_1}{n_6} = \frac{n_1}{n_4 D_5 / D_6} = \frac{n_1}{n_2 D_3 / D_4 \cdot D_5 / D_6} = \\ &= \frac{n_1}{n_1 D_1 / D_2 \cdot D_3 / D_4 \cdot D_5 / D_6} = \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{D_4}{D_3} \cdot \frac{D_6}{D_5} = i_{1-2} i_{3-4} i_{5-6} \end{aligned} \quad (9.11)$$

Таким образом, передаточное отношение ременной многоступенчатой передачи равно произведению передаточных, отношений отдельных ее ступеней. Отметим, что этот вывод справедлив для любой многоступенчатой передачи, а не только для ременной.

С учетом скольжения для простой ременной передачи

$$i_{12} = \frac{d_2}{d_1(1-\varepsilon)}. \quad (9.12)$$

9.4.6. Зубчатые передачи

Если на рабочих поверхностях фрикционных катков сделать чередующиеся выступы и впадины, равно отстоящие друг от друга так, чтобы выступы (зубья) одного входили во впадины другого, получим зубчатую передачу, состоящую из двух зубчатых колес. Меньшее из зубчатых колес, находящихся в зацеплении, называют *шестерней* (ей присваивается индекс 1), большее - *зубчатым колесом* (индекс 2) рис. 9.13.

У зубчатого колеса условно различают тело и зубчатый венец, отделяемый от тела соосной поверхностью впадин (соосной называют поверхность вращения, ось которой совпадает с осью колеса).

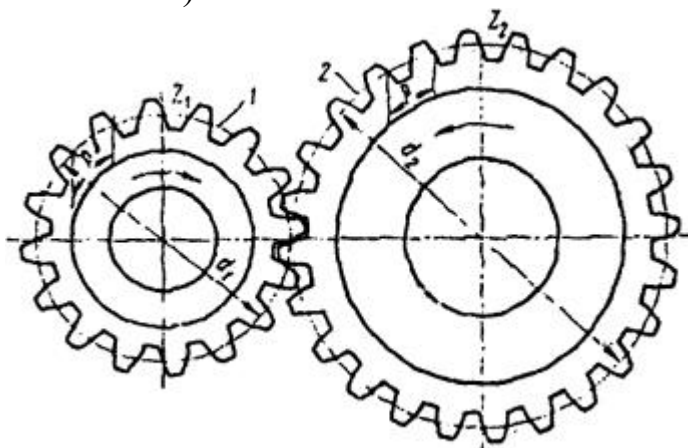


Рис. 9.13. Зубчатая передача

Линия пересечения боковой поверхности зуба с какой-либо заданной поверхностью (например, плоскостью, перпендикулярной оси колеса, и т. п.) называется *профилем зуба*.

Колесо, радиус которого равен бесконечности, называют *зубчатой рейкой* (см. рис. 9.14).

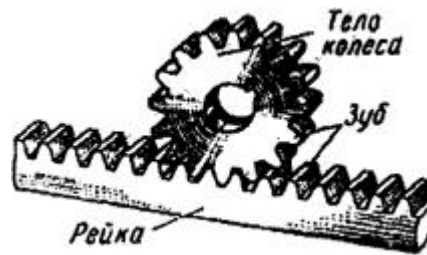


Рис. 9.14. Передача зубчатое колесо рейка

Зубчатые передачи можно классифицировать.

1. По характеру движения осей:

а) обычные передачи, имеющие неподвижные геометрические центры (оси) всех колес,

б) планетарные передачи, центры одного или нескольких колес подвижны.

2. По взаимному расположению осей:

а) цилиндрические передачи (передачи с параллельными осями, рис. 9.15);

б) конические передачи (передачи с пересекающимися осями, рис. 9.16 а);

в) гиперболоидные передачи (передачи с перекрещивающимися осями: червячные (рис. 9.16; б), винтовые (рис. 9.16 в), гипоидные и др.).

3. По относительному расположению поверхностей вершин и впадин зубьев колес:

а) передачи внешнего зацепления, образуются при зацеплении колес с внешними зубьями (рис. 9.15);

б) передачи внутреннего зацепления, образуются при зацеплении колес, одно из которых имеет внутренние зубья, а другое - внешние (рис. 9.16, г).

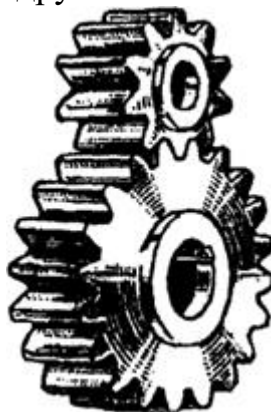


Рис. 9.15. Прямозубая цилиндрическая передача

У колеса с внешними зубьями поверхность вершин находится вне поверхности впадин, а у колеса с внутренними зубьями - внутри поверхности впадин.

4. По типу зубьев:

а) передачи с прямыми зубьями (прямозубые, см. рис. 9.15), имеют прямую линию зуба;

б) передачи с винтовыми зубьями (рис. 9.16, в), линии которых на соосной поверхности являются винтовыми линиями любого вида.

в) передачи с косыми зубьями и шевронными зубьями (являются разновидностью винтовых зубьев).

5. По профилям зубьев колес:

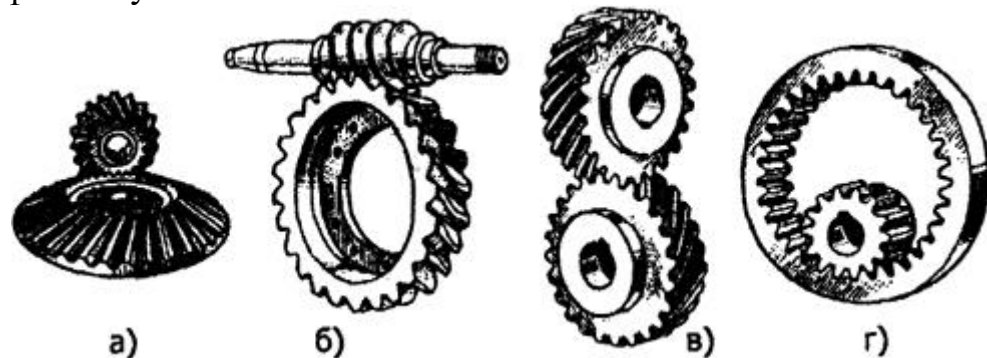


Рис. 9.16. Зубчатые передачи: а - коническая, б - червячная, в - винтовая, г - цилиндрическая с внутренним зацеплением

а) передачи с эвольвентным зацеплением,, в котором профили зубьев являются эвольвентами окружностей;

б) передачи с циклоидальным зацеплением, в котором профили зубьев являются циклоидами;

в) передачи с зацеплением Новикова, в котором выпуклый профиль зуба одного колеса и вогнутый профиль зуба другого колеса очерчены дугами окружностей.

Остановимся на кинематике зубчатых передач [4].

9.4.6.1. Кинематика передач

При вращении ведущего зубчатого колеса его зубья взаимодействуют с находящимися с ними в контакте (зацеплении) зубьями ведомого колеса, в результате чего оно также начинает вращаться. Наиболее распространены передачи с эвольвентным зацеплением, при котором профили зубьев выполнены по эвольвенте. Такой профиль позволяет зубьям при вращении колес обкатываться друг по другу, вследствие чего зубчатая передача работает плавно, с небольшими потерями энергии на трение.

Косозубые и шевронные колеса (рис. 9.17. б, в) обеспечивают более плавный ход передачи, так как в зацеплении одновременно находится большее число пар зубьев по сравнению с прямозубой передачей. В отличие от ременной и фрикционной передач в зубчатой передаче проскальзывание невозможно, поэтому передаточное отношение, а следовательно, и частота вращения ведомого вала всегда постоянны.

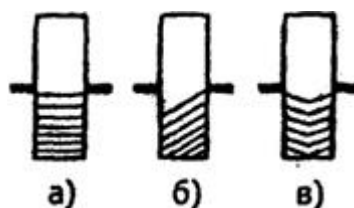


Рис. 9.17. Условные обозначения зубчатых колес с прямыми (а), косыми (б) и шевронными (в) зубьями

Если при вращении зубчатых колес представить себе в передаче две касающиеся окружности 1 и 2 диаметрами d_1 и d_2 (см. рис. 9.13.), которые катятся одна по другой без скольжения, это позволит распространить на зубчатую передачу основные кинематические закономерности фрикционной передачи. Таким образом, для зубчатой передачи передаточное отношение

Однако воспользоваться приведенным соотношением для практического определения передаточного отношения нельзя, так как диаметры воображаемых окружностей (их называют начальными окружностями) трудно измерить. Поэтому передаточное отношение необходимо выразить через другие, более удобные для измерений или определений величины.

Зацепление зубчатых колес в передаче требует соблюдения основного условия: зуб одного колеса должен точно входить в соответствующую ему при зацеплении впадину другого колеса. Ширину зуба и впадины, а так же другие элементы зацепления рассчитывают по так называемым *делительным* окружностям на которых основные элементы зубчатого зацепления равны аналогичным теоретическим элементам зуборезного инструмента (вследствие этого делительные окружности используют при расчетах для настройки зуборезного станка).

При изготовлении стандартных зубчатых колес делительная окружность совпадает с начальной. Таким образом, можно сказать,



Рис. 9.18. Элементы зубчатого зацепления

что зубчатое зацепление возможно лишь при равенстве окружных шагов p , измеренных по дугам делительных окружностей (рис. 9.18). (*Окружной шаг* - это длина отрезка дуги делительной окружности, равная длине всей делительной окружности, разделенной на число зубьев z). На одном колесе $p = \pi d / z_1$, на другом $p = \pi d_2 / z_2$. Следовательно, $\pi d_2 / z_2 = \pi d_1 / z_1$, откуда $d_2 / d_1 = z_2 / z_1$. Так как $i_{1-2} = d_2 / d_1$ то окончательно можно сделать вывод, что

$$\begin{aligned} i_{1-2} &= z_2 / z_1 \\ u_{1-2} &= z_2 / z_1 \end{aligned} \quad (9.13)$$

Следовательно, *передаточное отношение* (*передаточное число*) зубчатой передачи выражается через отношение чисел зубьев ведомого и ведущего колес.

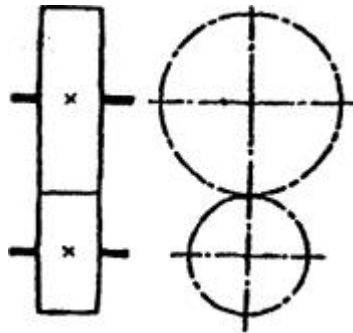


Рис. 9.19. Условное обозначение зубчатой цилиндрической передачи с наружным зацеплением (показываются только делительные окружности)

Зубчатые цилиндрические передачи могут быть как с наружным (рис. 9.15), так и с внутренним зацеплением (рис. 9.16). При наиболее распространенном способе изготовления зубчатых колес методом обкатки зуборезным инструментом число зубьев не может быть меньше 17; в противном случае инструмент будет подрезать основание зуба и ослаблять его.

Наибольшее число зубьев теоретически ничем не ограничено, однако и здесь есть разумный предел. С учетом этих ограничений установлены номинальные величины передаточного числа для пары зубчатых колес:

$$\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{7} \right) \leq u_{1-2} \leq 5(7).$$

Если иметь в виду наиболее распространенные понижающие передачи (т. е. передачи с $u_{1-2} > 1$), то намного увеличить передаточное число можно только путем создания многоступенчатых передач. Например, для трехступенчатой зубчатой передачи (рис. 9.20) общее передаточное число равно произведению передаточных чисел отдельных ступеней, т. е.

$$u_{1-6} = u_{1-2} u_{3-4} u_{5-6},$$

Кроме простых зубчатых передач, состоящих из одной пары колес, и многоступенчатых передач иногда используют зубчатые *передачи с промежуточными зубчатыми колесами*.

Передачу, показанную на рис. 9.20, б можно представить как двухступенчатую со ступенями $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_3$, т. е. считать, что колесо z_2 для первой ступени ведомое, а для второй - ведущее. В этом случае общее передаточное число

$$u_{1-3} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_3}{z_1}.$$

Аналогично передачу, показанную на рис. 9.20, в, будем считать состоящей из трех ступеней: $z_1 - z_2$; $z_2 - z_3$; $z_3 - z_4$. Для нее

$$u_{1-4} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_4}{z_3} = \frac{z_4}{z_1}.$$

Передачи, в которых промежуточные зубчатые колеса не изменяют передаточного числа, применяют в двух случаях: 1) межосевое расстояние между ведущим и ведомым валами велико для одной пары колес; 2) на ведомом валу необходимо сохранить направление вращения ведущего вала (в этом случае число промежуточ-

ных колес должно быть нечетным) Промежуточное зубчатое колесо, одновременно зацепляющееся <: двумя другими так, что по отношению к одному является ведомым, а по отношению к другому - ведущим, называется *паразитным*,

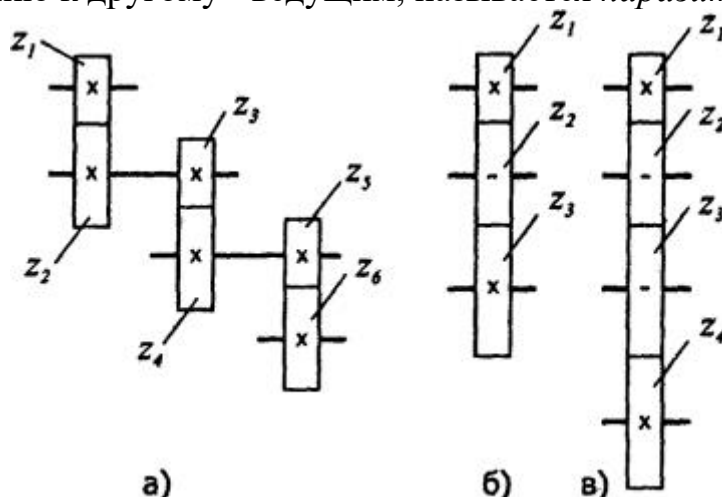


Рис. 9.20. Схемы трехступенчатой (а), с одним паразитным колесом (б) и с двумя паразитными колесами (в) зубчатых передач

Если в одной конструкции объединить рассматриваемые схемы (см. рис. 9.20, б и в), то получится реверсивный механизм, с помощью которого при неизменном направлении вращения ведущего

вала ведомый вал будет изменять направление вращения в зависимости от числа включенных колес - четного или нечетного.

9.4.6.2. Геометрические элементы зубчатого зацепления

Известно, что шаг зубчатой передачи $p = \pi d/z$. Отсюда можно определить диаметр делительной окружности (см. рис. 9.18.): $d = pz/\pi$. Для первого колеса $d_1 = pz_1/\pi$, для второго $d_2 = pz_2/\pi$. Поскольку величина p/π , имеющаяся в обоих выражениях, не может быть подсчитана точно, более удобно взамен ее ввести величину m (мм, называемую модулем зубчатого колеса:

$$m = p/\pi \quad (9.14.)$$

Значения модуля, являющегося основной геометрической характеристикой зубчатого колеса, стандартизованы, что облегчает изготовление и подбор зубчатых колес.

Расстояние от делительной окружности до вершины зуба называется *высотой головки зуба* h_a (см рис. 9.18), а от делительной окружности до основания зуба - высотой ножки зуба h_f . При изготовлении некоррегированных колес стандартным зуборезным инструментом высота головки зуба получается равной m , а высота его ножки - $1,25m$. Таким образом, полная высота зуба $h = 2,25m$. Для цилиндрического зубчатого колеса можно легко определить основные размеры

диаметр делительной окружности $d = mz$,

диаметр окружности вершин $d_a = d + 2h_a = m(z + 2)$,

диаметр окружности впадин $d_f = d - 2h_f = m(z - 2,5)$.

Расстояние между центрами колес (межосевое расстояние)

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2}. \quad (9.15)$$

на два (с последующим округлением до ближайшей стандартной величины), т.е.

$$m = d_a / (z + 2). \quad (9.16)$$

Приведенные выше выводы справедливы только для некоррегированных зубчатых колес с прямыми зубьями.

Зубчатые передачи могут выполняться в виде коробок перемены передач, редукторов и мультипликаторов.

Коробка перемены передач (КПП) - устройство, в котором скорость выходного вала регулируется ступенчато. В КПП изменение передаточного числа достигается тем, что в зацепление вводят то одни, то другие зубчатые колеса в различных комбинациях. Это обеспечивается чаще всего перемещением блоков зубчатых колес по валам, имеющим направляющую шпонку или шлицы (рис. 9.21, а).

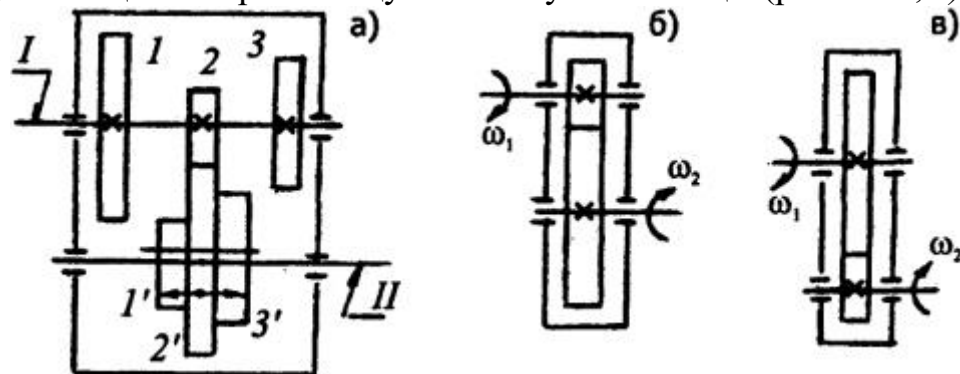


Рис. 9.21. Коробка перемены передач (а), редуктор (б) и мультипликатор (в)

Редуктор - устройство, понижающее угловую скорость (частоту вращения) выходного вала. Для редуктора $u = \omega_1 / \omega_2 > 1$; ($\omega_1 > \omega_2$) при этом моменты на ведомых валах увеличиваются $T_2 > T_1$ (рис. 9.21, б).

Мультипликатор - устройство, повышающее частоту вращения ведомого вала. Для мультипликатора $u = \omega_1 / \omega_2 < 1$; ($\omega_1 < \omega_2$, $T_1 > T_2$) (рис. 9.21, в).

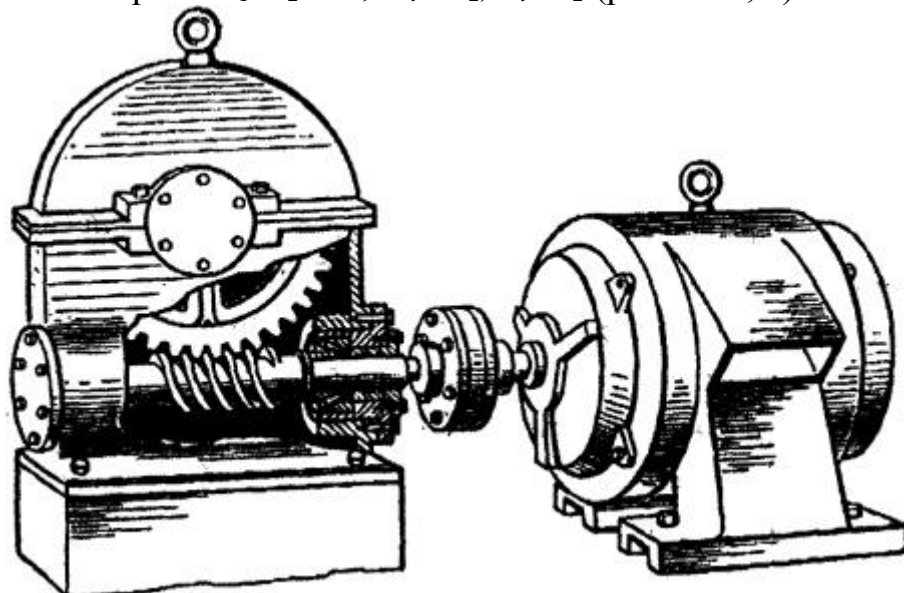


Рис. 9.22. Привод "Электродвигатель - червячный редуктор"

Таким образом, основные назначения редуктора - понижение угловой скорости и, соответственно, повышение вращающего момента на ведомом валу по сравнению с моментом на ведущем валу. В зависимости от вида передачи, которая ис-

пользуется в редукторе, различают зубчатые цилиндрические, зубчатые конические, червячные и комбинированные редукторы (рис. 9.23). Они могут быть одно- и многоступенчатыми. Общий вид привода, состоящего

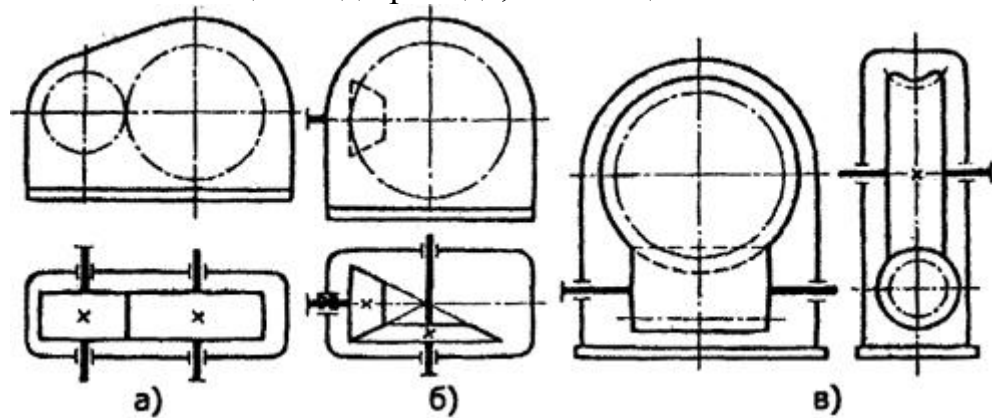


Рис. 9.23. Схемы редукторов:

- одноступенчатого с цилиндрическими колесами, б - одноступенчатого с коническими колесами, в - одноступенчатого червячного

из электродвигателя и червячного редуктора, валы которых соединены муфтой, показан на рис. 9.22

9.4.7. Червячная передача

Червячная передача, являющаяся зубчато-винтовой, состоит из червячного (козозубого) колеса с зубьями специальной формы и червяка (винта с трапециевидной резьбой). Она применяется для передачи вращения между валами, геометрические оси которых скрещиваются (рис. 9.24). Для обеспечения зацепления шаг червяка должен быть равен окружному шагу червячного колеса.

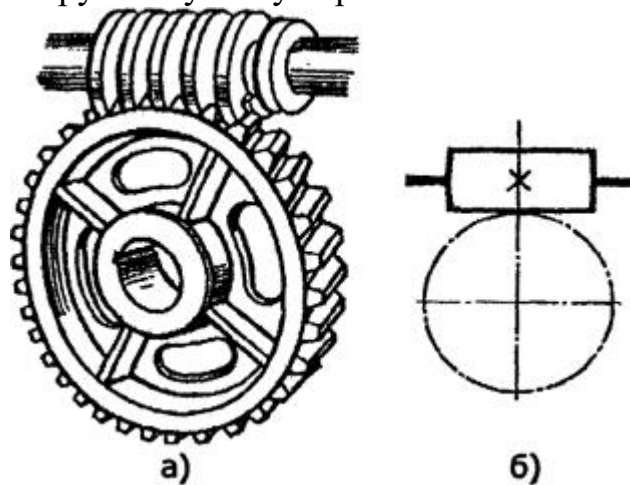


Рис. 9.24. Червячная передача (а) и ее условное обозначение (б)

Червяк, как и обычный винт, может быть одно- и многозаходным. Если повернуть однозаходный червяк на один оборот, то связанное с ним червячное колесо повернется на угол, соответствующий одному шагу; при двухзаходном червяке поворот будет равен углу, соответствующему двум шагам, и т. д. Чтобы, например, однозаходный червяк повернул колесо на один полный оборот, он должен сам совершить столько оборотов, сколько на колесе зубьев. Следовательно, *передаточное*

отношение червячной передачи выражается через отношение числа зубьев колеса к числу заходов резьбы на червяке, т. е.

$$u_{1-2} = z_k / z_v.$$

Червячная передача по сравнению с другими имеет такие преимущества, как плавность и бесшумность работы, возможность получать большие передаточные отношения. Например, вполне возможна червячная передача, у которой $z_k = 50$ и $z_v = 1$, т. е.

$m_{1-2} = 50$, тогда как для одной пары зубчатых колес обычно не превышает 5-7. Однако в червячной передаче наиболее низкий к. п. д. из-за больших потерь мощности на трение; чтобы их снизить, для изготовления рабочих частей червячного колеса обычно используют антифрикционные материалы (например, бронзу).

9.4.8. Цепная передача

Цепные передачи, как и ременные, относятся к приводам с гибкой связью и обеспечивают передачу вращающего момента между валами, которые могут находиться на значительном (до 8 м) расстоянии друг от друга. На ведущем и ведомом валах передачи устанавливают звездочки с числом зубьев z_1 и z_2 , связанные бесконечной приводной цепью (рис. 9.25). Кроме этих основных элементов, большинство конструкций цепных передач имеют натяжные и смазочные устройства, картеры и ограждения.

Цепные передачи работают по принципу зацепления, а не трения, как ременные. Это обеспечивает постоянство передаточного отношения. Принцип зацепления не требует предварительного натяжения цепи, в связи с чем уменьшается нагрузка на валы и опоры, а также повышается КПД передачи (до 0,98).

Угол обхвата звездочки цепью не имеет столь решающего значения, как угол обхвата шкива ремнем. Поэтому цепные передачи могут надежно работать при малых межцентровых расстояниях и при больших передаточных отношениях. По сравнению с ременными цепные передачи имеют значительно меньшие габаритные размеры, потери на трение и эксплуатационные расходы."

Цепи по сравнению с ремнями отличаются повышенной прочностью. Это позволяет цепным передачам передавать значительно большие мощности при меньших габаритных размерах по сравнению с ременными.

Цепные передачи выполняют как понижающими, так и повышающими (например, повышающая передача к заднему колесу велосипеда). Их широко используют в транспортных средствах (мопеды, мотоциклы), в транспортирующих машинах (конвейеры, эскалаторы), а также в сельскохозяйственном и автомобильном машиностроении. Можно встретить эти передачи в станкостроении, в горнорудном, нефтяном, химическом, металлургическом и других отраслях машиностроения.

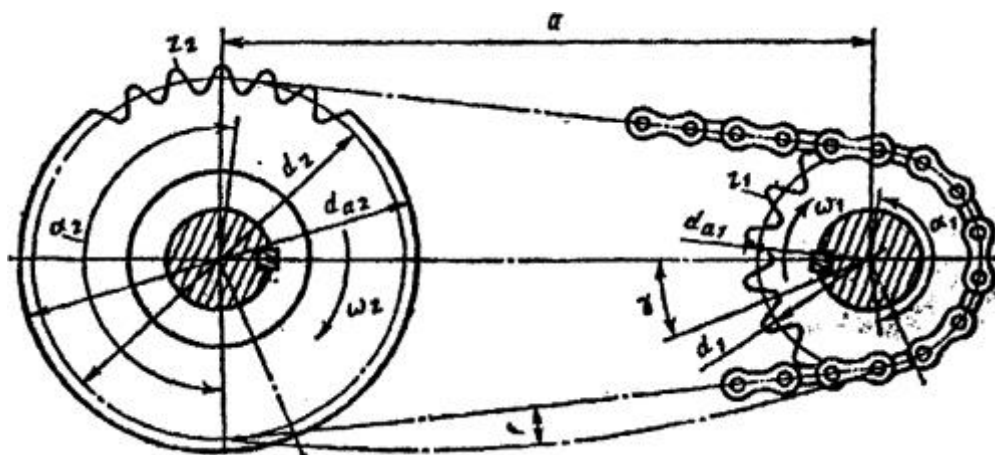


Рис. 9.25. Цепная передача

Передаточное отношение цепной передачи выражается через отношение зубьев ведомой и ведущей звездочек, т. е.

$$u_{1-2} = z_2/z_1$$

Условное обозначение цепной передачи приведено на рис. 9.26.

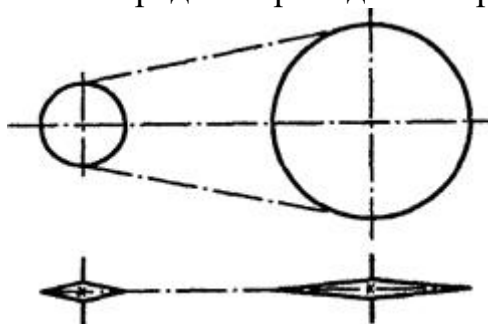


Рис. 9.26. Условное обозначение цепной передачи

9.5. Детали и сборочные единицы передач вращательного движения

9.5.1. Оси и валы

Оси и валы - детали, несущие на себе вращающиеся части машин: зубчатые колеса, шкивы, барабаны, звездочки и т. д. Ось обычно представляет собой сплошное или полое ступенчатое (реже гладкое) тело цилиндрической формы (рис. 9.27). Оси бывают *вращающиеся* и *неподвижные*. Например, вагонная ось вместе с закрепленными на ней колесами вращается, ось велосипеда неподвижна, а колесо вращается относительно нее.

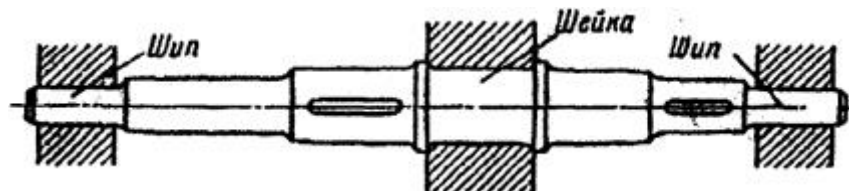


Рис. 9.27. Ось

Наиболее распространенные *прямые валы*, по форме не отличающиеся от осей, существенно отличаются от них по характеру работы. Одно из отличий: валы не могут быть неподвижными, они обязательно вращаются. Но главное отличие в другом: оси только несут на себе части машин, а следовательно, подвергаются только изгибу, а валы, кроме того, еще и передают вращающий момент, а значит, испыты-

вают одновременное действие изгиба и кручения. Например, шпиндель токарного станка представляет собой полый прямой вал. Вращающему моменту, который передается на шпиндель от электродвигателя (через промежуточные валы), противодействует момент, создаваемый силой резания. Одна из составляющих силы резания, кроме того, изгибает шпиндель [4].

9.5.2. Опоры осей и валов (подшипники)

Вращающиеся оси и валы своими шипами и шейками-цапфами (рис. 9.27) опираются на неподвижные опоры (подшипники). В зависимости

от характера трения между вращающимися и неподвижными деталями различают подшипники *скольжения* и подшипники *качения*.

Подшипники скольжения. Простейший подшипник скольжения для цапфы вала выполняется в виде отверстия в станине или корпусе машины, однако после износа он не может быть восстановлен. Поэтому целесообразней делать подшипники в виде самостоятельного узла - втулки с фланцем. Еще более совершенна конструкция, в которой внутрь такого подшипника запрессовывается сменная втулка из специального антифрикционного материала (например, бронзы), что позволяет при износе заменять не весь подшипник, а лишь втулку.

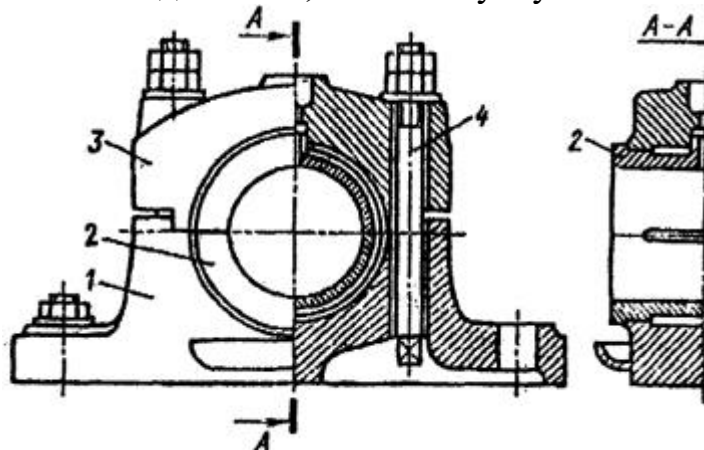


Рис. 9.28. Разъемный подшипник скольжения

Наиболее часто, особенно при больших нагрузках, применяют подшипник с разрезной втулкой - разъемными вкладышами (рис. 9.28). Он состоит из корпуса 7, разъемного вкладыша 2, крышки 3 и болтов 4. Через отверстие в крышке на трущиеся поверхности поступает масло. Такой разъемный подшипник удобно устанавливать на любом участке вала (неразъемный можно установить лишь на концевой опоре - шипе); в нем также можно регулировать зазор между валом и вкладышем, поджимая болтами 4 крышку с верхней половиной вкладыша.

Удобство монтажа и демонтажа, а также относительная простота конструкции являются достоинствами подшипников скольжения. Однако у них есть и существенные недостатки, и, в первую очередь, большие потери мощности на преодоление трения скольжения.

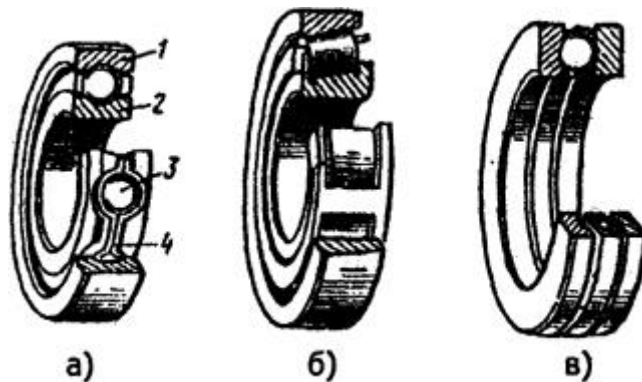


Рис. 9.29. Подшипники качения: а - шариковый радиальный однорядный, б - роликовый конический радиально-упорный, в - шариковый упорный одинарный

Подшипники качения. Широкое применение подшипников качения объясняется малой потерей мощности на преодоление трения. Подшипник качения (рис. 9.29) состоит из внутреннего 2 и наружного 1 колец, тел качения 3 (в данном случае шариков) и сепаратора 4. Внутреннее кольцо обычно жестко насаживается на вал, а наружное закрепляется в корпусе. Между вращающимся и неподвижным кольцами расположены тела качения, удерживаемые на постоянном расстоянии друг от друга сепаратором (слово "*сепаратор*" означает разделитель). В зависимости от формы тел качения подшипники делятся на *шариковые* и *роликовые*, а в зависимости от числа рядов тел качения - на *одно-*, *двух-* и *многорядные*. По направлению нагрузок, для восприятия которых предназначены подшипники, различают *радиальные*, *осевые (упорные)* и *радиально-упорные* подшипники: радиальные предназначены для противодействия таким внешним силам, которые направлены перпендикулярно продольной оси подшипника (вала), т.е. по линии, совпадающей с одним из радиусов этих деталей; осевые удерживают вал от осевых перемещений, т. е. перемещений в направлении продольной оси подшипника (вала); радиально-упорные одновременно противодействуют как радиальным, так и осевым перемещениям валов.

Все подшипники стандартизованы. В зависимости от соотношения радиальных и осевых размеров их разделяют на серии - *легкую*, *среднюю* и *тяжелую*. При одинаковом внутреннем диаметре меньшую ширину и наружный диаметр имеют подшипники легкой серии. Подшипники различаются также по нагрузочной способности (динамической грузоподъемности), т. е. по способности в течение определенного срока выдерживать без разрушения заданную нагрузку при заданной угловой скорости вращения вала. В справочных таблицах (каталогов подшипников) указывается динамическая грузоподъемность, по которой выбирают подшипник для конкретных условий работы.

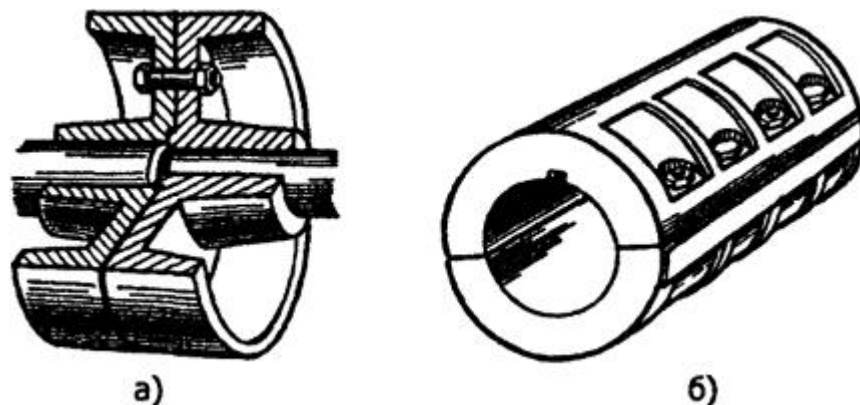


Рис. 9.29. Поперечно-свертная (а) и продольно-свертная (б) муфты

9.5.3. Муфты

Муфты предназначены для передачи вращения с одного вала на другой, расположенный с ним соосно. Если муфта рассчитана на постоянное соединение валов, то она называется *постоянной*. К постоянным относятся *поперечно-свертная* (рис. 9.29, а) и *продольно-свертная* (рис. 9.29, б) муфты, состоящие из двух полумуфт, соединенных болтами. Вращающийся момент передается

шпонками. Подобные муфты, называемые глухими, просты по конструкции, однако имеют существенный недостаток - требуют точного центрирования соединяемых валов при сборке.

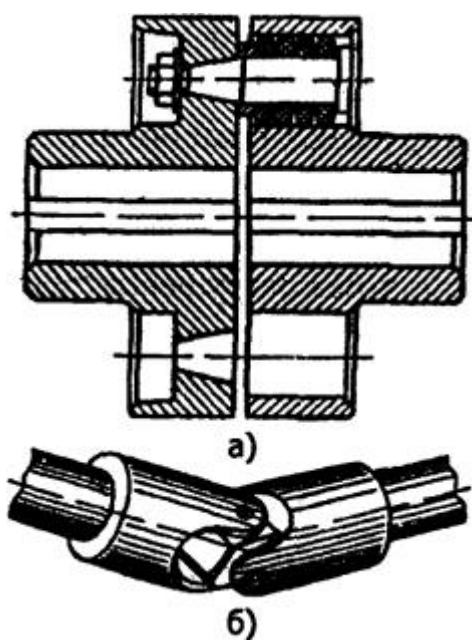


Рис. 9.30. Упругая втулочно-пальцевая (а) и крестово-шарнирная (б) муфты

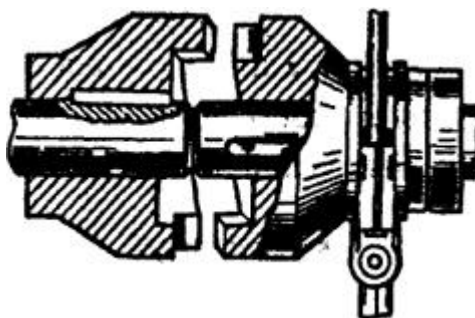


Рис. 9.31. Кулачковая муфта

Этого недостатка нет у компенсирующих постоянных муфт. Конструкция их сложнее, однако и возможности шире - они могут соединять валы, имеющие смещение и перекос геометрических осей. Если в такой муфте смещение и перекос валов компенсируются упругими элементами, например стальными пластинчатыми пружинами или резиновыми кольцами, то ее называют *упругой*, если же упругих элементов нет, муфта называется *жесткой*. Из упругих компенсирующих муфт наиболее широкое применение получили *втулочно-пальцевые* (рис. 9.30 а). Не менее часто используют *жесткие крестово-шарнирные* муфты (рис. 9.30 б), состоящие из двух вилок и крестовины.

При необходимости в процессе работы многократно соединять и разъединять валы применяют *цепные муфты*, из которых наиболее

часто используют *кулачковую* (рис. 9.31) Одна из полумуфт жестко соединена с валом, а вторая может перемещаться вдоль него по шпонке или по шлицам. При включении муфты кулачки, имеющиеся на торцовых поверхностях одной полумуфты, входят во впадины другой и передают вращение.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение кривошипа, шатуна, коромысла, кулисы, ползуна.
2. Какие механизмы относятся к рычажным?
3. Что называется шатунной кривой?
4. К какому типу относятся мальтийские и храповые механизмы?
5. Из каких подвижных звеньев состоит кулачковый механизм?
6. В чем заключается отличие плоских и пространственных кулачковых механизмов?
7. От чего зависит профиль кулачка?
8. Какую зависимость называют диаграммой перемещения толкателя?
9. Что называют механической передачей?
10. По каким принципам классифицируют механические передачи?
11. Дайте определение передаточного числа и передаточного отношения.
12. Какую передачу называют повышающей, а какую понижающей?
13. Как определяется передаточное отношение в сложной зубчатой передаче?
14. Назовите элементы зубчатого зацепления.
15. Какое устройство называют редуктором?
16. Из каких деталей состоит червячная передача?
17. Перечислите недостатки и преимущества ременных и цепных передач.
18. Из каких элементов состоит вал?
19. Чем отличается ось от вала?
20. Для чего применяют подшипники?
21. На какие типы подразделяют подшипники?
22. В чем заключается назначение муфт?

10. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИНАМИКИ МЕХАНИЗМОВ

10.1. Силы, действующие в механизмах

Движение звеньев любого механизма происходит под действием различных по своей природе сил, которые обуславливают определенные перемещения, скорости

и ускорения звеньев. Определение действующих на звенья сил имеет важное практическое значение как для обеспечения заданного движения механизма, так и для расчета звеньев на прочность, жесткость и износостойкость.

Все силы и моменты сил, которые могут действовать на звенья механизмов, удобно классифицировать следующим образом.

1. *Движущие силы P_d и моменты сил T_d* приложенные к ведущим звеньям механизмов и обеспечивающие заданное движение. К ним относятся крутящий (вращающий) момент, развиваемый электродвигателем, давление воздуха на поршень пневмодвигателя и т. д. Движущая сила совпадает по направлению со скоростью перемещения точки ее приложения или составляет с ней угол меньше 90° , поэтому работа движущей силы всегда положительна.

2. *Силы F_c и моменты сил M_c полезных или рабочих сопротивлений* приложенные к ведомым звеньям и направленные так, что препятствуют их движению, т. е. силы полезных сопротивлений направлены против скорости перемещения ведомого звена. Поэтому работа сил полезного сопротивления отрицательна. К полезным сопротивлениям, например, относятся давление газа или жидкости на поршень насоса, силы пробивки отверстий в материале и т. д.

3. *Силы тяжести звеньев G* , приложенные в центрах масс звеньев. Эти силы могут как способствовать, так и препятствовать движению звеньев в зависимости от направления скорости их центров масс. Работа сил тяжести за один цикл движения механизма равна нулю, поэтому при решении некоторых задач динамики их не учитывают.

4. Силы F_u и моменты M_u сил инерции звеньев, возникающие при изменении скорости по модулю или направлению. При движении с большими ускорениями давления звеньев в кинематических парах и напряжения от инерционных нагрузок могут значительно превосходить давления, напряжения и силы трения от действия других сил.

Для звена, совершающего плоскопараллельное движение, все элементарные силы инерции могут быть сведены к одной силе инерции F_u - главному вектору сил инерции, приложенному к центру масс звена, и к главному моменту сил инерции M_u .

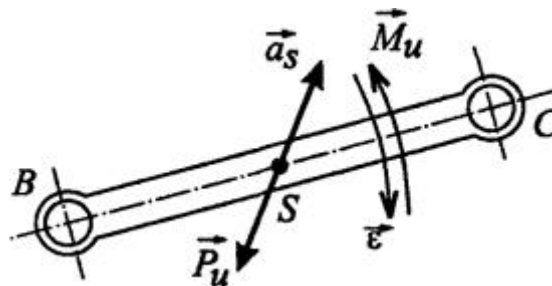


Рис. 10.1. Направление силы инерции и момента сил инерции в шатуне

$$F_u = m a_s, \quad \vec{F}_u = -\vec{a}_s \cdot m, \quad (10.1)$$

где m - масса звена; a_s - ускорение центра масс звена. Момент сил инерции (направлен противоположно угловому ускорению) находят из уравнения:

$$M_u = J_s \cdot \epsilon, \quad \vec{M}_u = -\vec{\epsilon} \cdot J_s, \quad (10.2)$$

где J_s - момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения звена; ε - угловое ускорение звена.

Определение величин и направлений a_{si} и ε_i , изложено в разделе 8.2. Для тонкого однородного стержня длиной l и с малыми поперечными размерами момент инерции определяется по формуле

$$J_s = \frac{1}{12} ml^2. \quad (10.3)$$

Работа сил и моментов сил инерции за время цикла равна нулю.

5. *Вредные сопротивления*, вызывающие непроизводительную затрату движущей энергии. Это, главным образом, силы трения F_f и моменты M_f сил трения в кинематических парах. Различают два вида трения: *трение скольжения* и *трение качения*.

В случае трения скольжения силу трения принято определять по формуле:

$$F_f = f \cdot N = T, \quad (10.4)$$

где F_f - сила трения скольжения, с которой одно из трущихся тел действует на другое;

f - коэффициент трения скольжения;

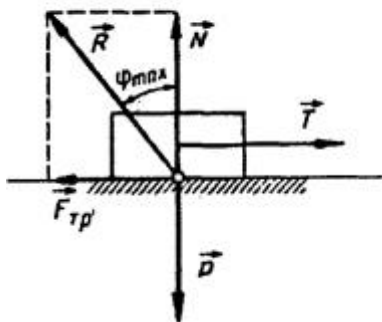
N - сила нормального давления на трущихся поверхностях;

T - сдвигающая сила.

Равнодействующая сил F_f и N , т. е. сила R наклонена под углом φ к силе нормального давления N . Угол φ называют *углом трения* (рис. 10.2, а).

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max} = \frac{F_{mp}}{N} = f. \quad (10.5)$$

а)



б)

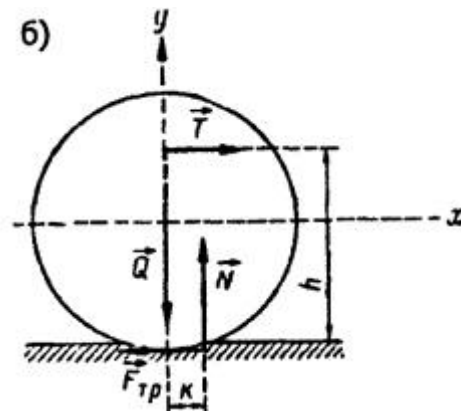


Рис. 10.2. Трение скольжения (а) и качения (б)

В тех случаях, когда трущиеся поверхности разделены телами качения, надо учитывать сопротивление, возникающее при перекатывании, - *силу трения качения* F_k . Работа силы трения качения расходуется на деформацию контактирующих тел:

$$F_k = f_k \cdot N = \frac{\kappa}{h} \cdot N, \quad (10.6)$$

где f_k - относительный коэффициент трения качения, который имеет значительно меньшее значение, чем коэффициент трения скольжения.

6. *Реакции в кинематических парах* R_{ij} , связывающих i -е и j -е звенья, - это усилия, с которыми одно звено воздействует на другое в местах их соприкосновения.

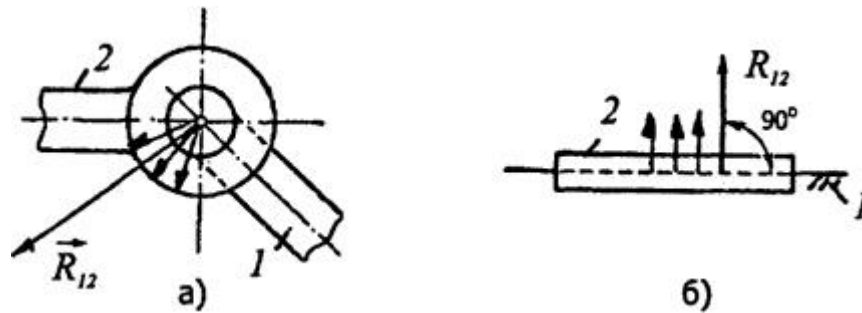


Рис. 10.3. Точка приложения реакции во вращательной паре (а); линия действия реакции в поступательной паре (б)

Так как каждая сила и, следовательно, каждая реакция определяется тремя параметрами (величиной, направлением и точкой приложения), то, пренебрегая трением в кинематических парах, можно отметить следующее.

Во вращательной паре известна точка приложения реакций - ее центр (рис. 10.3, а). В ней подлежат определению *величина* и *направление* реакции.

В поступательной паре реакция направлена перпендикулярно к направляющей и определению подлежат *величина* и *точка приложения* реакции (рис. 10.3, б).

10.2. Силовой (кинетостатический) анализ рычажного механизма

При силовом анализе механизмов определяют реакции в кинематических парах, уравнивающую силу F_y или уравнивающий момент M_y . *Под уравнивающей силой понимают силу, определяемую из условия обеспечения требуемого закона движения механизма* [10].

Силы трения при выполнении силового анализа не учитывают.

Силовой анализ выполняют без учета сил инерции (*статический*) и с учетом сил инерции (*кинетостатический*).

Силовой анализ рычажного механизма удобнее проводить, разделяя его на группы Ассура. При этом определение реакций в кинематических парах выполняют сначала для наиболее удаленной группы, постепенно переходя к последующим и завершая рассмотрением начального механизма.

При силовом анализе группы Ассура вначале определяют реакции во внешних кинематических парах, а затем - во внутренних. Во вращательной паре реакцию заменяют двумя составляющими: нормальной R_n , которая направлена вдоль оси звена, и тангенциальной R_t , перпендикулярной к R_n . Это позволяет определить тангенциальную составляющую реакции из уравнения моментов сил, действующих на данное звено, относительно центра внутреннего шарнира. Нормальная составляющая в этом случае момента не дает, так как она направлена вдоль оси звена.

Рассмотрим кривошипно-ползунный механизм (рис. 10.4, а), формула строения которого имеет вид: $I_{(1)} - II_{(2-3)}$.

На звенья механизма действуют силы тяжести G_1 , G_2 и G_3 , приложенные в их центрах тяжести. Сила полезного сопротивления F_c приложена к звену 3.

Направления и модули сил инерции определим, используя план ускорений (рис. 10.4, б) механизма, по зависимостям (10.1, 10.2).

Считаем, что звено 1 совершает вращательное движение с постоянной угловой скоростью, тогда $F_{u1} = 0$ и $M_{u1} = 0$. Для звена 2, совершающего плоскопараллельное движение $\vec{F}_{u2} = -m_2 \vec{a}_{S_2}$, $\vec{F}_{u2} = -I_{S_2} \vec{\varepsilon}_2$. Главный вектор сил инерции \vec{F}_{u2} приложен в центре масс звена 2 и направлен противоположно вектору ускорения центра масс этого звена. Главный момент сил инерции \vec{M}_{u2} имеет направление, противоположное угловому ускорению звена 2. Так как третье звено совершает поступательное движение, то

$$\vec{F}_{u3} = -m_3 \vec{a}_{S_3}, \quad M_{u3} = 0.$$

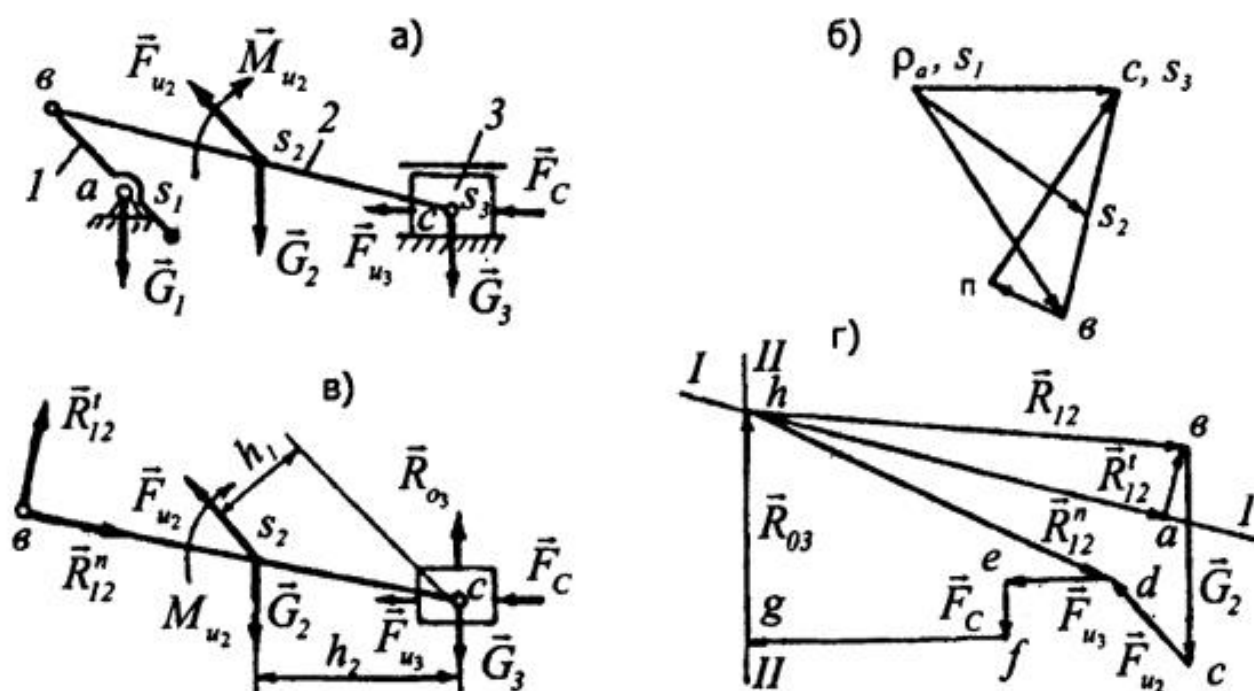


Рис. 10.4. К силовому анализу группы Ассура

Группа Ассура. Изобразим в масштабе μ_l группу Ассура, состоящую из звеньев 2 и 3, покажем действующие на звенья силы (рис. 10.4, в), а также реакции отсоединенных звеньев \vec{R}_{12} и \vec{R}_{03} . Реакцию \vec{R}_{12} в шарнире В разложим на две составляющие: нормальную \vec{R}''_{12} , направленную вдоль оси звена 2, и тангенциальную \vec{R}'_{12} , перпендикулярную к ней.

Векторное уравнение равновесия рассматриваемой группы

$$\overline{R}_{12}'' + \overline{R}_{12}' + \overline{G}_2 + \overline{F}_{u_3} + \overline{F}_{u_3} + \overline{G}_3 + \overline{F}_c + \overline{F}_{03} = 0 \quad (10.7)$$

содержит три неизвестные величины: реакции \overline{R}_{12}'' , \overline{R}_{12}' и \overline{R}_{03} .

Известно, что векторное уравнение можно решить графически в том случае, если оно содержит только две неизвестные величины. Поэтому из уравнения моментов сил, действующих на звено 2, относительно шарнира С

$$-R_{12}' \cdot l_{BC} - M_{u_2} + G_2 h_2 - F_{u_2} h_1 = 0$$

Определим

$$R_{12}' = \frac{1}{l_{BC}} (-M_{u_2} - F_{u_2} h_1 + G_2 h_2).$$

Теперь можно решить графически векторное уравнение (10.7) путем построения плана сил. Для этого проведем прямую $I-I$, направление которой совпадает с направлением \overline{R}_{12}'' , и на ней произвольно выберем точку a (рис. 10.4, z). От точки a последовательно в масштабе μ_F отложим векторы \overline{F}_{12}' , \overline{G}_2 , \overline{F}_{u_2} , \overline{F}_{03} , \overline{G}_3 и \overline{F}_c . Через конец вектора \overline{fg} , изображающего в масштабе μ_F силу \overline{F}_c , проведем прямую $II-II$, направление которой совпадает с направлением вектора \overline{R}_{03} , и найдем точку пересечения прямых $I-I$ и $II-II$. Тогда $R_{12}'' = ha \cdot \mu_F$, $R_{03} = gh \cdot \mu_F$. Учитывая, что $\overline{R}_{12} = \overline{R}_{12}'' + \overline{R}_{12}'$, из плана сил находим $R_{12} = hb \cdot \mu_F$.

Для определения реакции во внутренней кинематической паре С составим векторное уравнение равновесия звена 3:

$$\overline{R}_{12}'' + \overline{R}_{23} + \overline{F}_{u_3} + \overline{G}_3 + \overline{F}_c + \overline{R}_{03} = 0. \quad (10.8)$$

Сравнивая уравнения (10.7) и (10.8), можно заметить, что реакция F_{23} численно равна результирующей сил, действующих на звено 2, и противоположно ей направлена. Потому прямая, соединяющая на плане сил начало вектора R_{12} с концом вектора F_{u_2} , определяет направление R_{23} , а $R_{23} = hd \cdot \mu_F$.

Определив реакции в кинематических парах группы Ассура, переходим, согласно формуле строения механизма, к силовому анализу простейшего начального механизма.

Начальный механизм. Передача вращательного движения начальному механизму может осуществляться посредством муфты или с помощью зубчатой передачи.

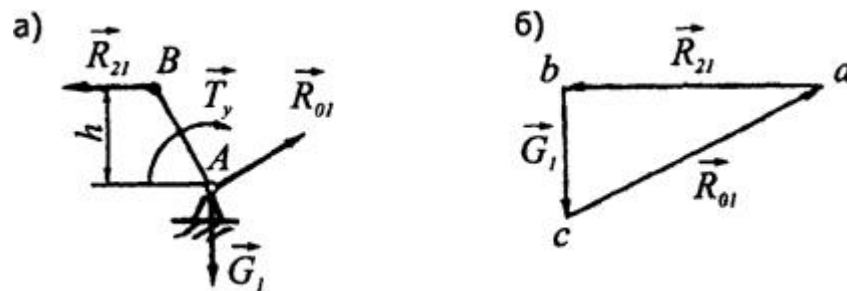


Рис. 10.5. К силовому анализу начального механизма

Если передача вращательного движения осуществляется посредством муфты, то к звену 1 простейшего механизма приложен уравнивающий момент T_y (рис. 10.5, а). Его модуль можно найти из уравнения моментов сил, действующих на звено 1, относительно шарнира А: $-T_y + R_{21}h = 0$. Реакцию R_{01} определим из плана сил (рис. 10.5, б), построенного в масштабе μ_F , согласно векторному уравнению равновесия кривошипа $R_{21} + G_1 + R_{01} = 0$, откуда $R_{01} = ca * \mu_F$.

10.3. Движение механизма под действием приложенных сил

При рассмотрении движения механизма различают три основные стадии (рис. 10.6): разгон до номинальной скорости за время t_p , установившееся движение в течение времени t_y и выбег за время t_b . Установившееся движение наиболее продолжительно и характеризуется

равенством работы сил движущих и сил сопротивлений за время, кратное длительности цикла t_c . Вследствие этого мгновенная угловая скорость ω входного звена хотя и изменяется в пределах от ω_{min} до ω_{max} , однако ее среднее значение $\omega_m = const$ [6].

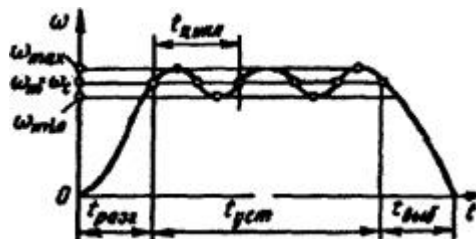


Рис. 10.6. Тахограмма механизма

Величину колебания скорости в стадии установившегося движения характеризуют коэффициентом неравномерности хода δ :

$$\delta = \frac{2\omega_a}{\omega_m} = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_m}, \quad (10.9)$$

где ω_a - амплитуда колебаний угловой скорости рассматриваемого звена:

$$\omega_m = 0,5(\omega_{max} + \omega_{min}). \quad (10.10)$$

где ω_m - средняя скорость его установившегося движения.

Колебания угловой скорости входного звена могут быть *периодическими*, *непериодическими* и *случайными*. *Периодическими* называются такие колебания, когда значения угловой скорости повторяются через равные промежутки времени, обычно кратные частоте вращения звена. Периодические колебания скорости

наблюдаются в механизмах, в которых силы и приведенные моменты инерции - периодические функции угла поворота входного звена. Непериодические и случайные колебания угловой скорости вызываются соответствующими изменениями притока движущей энергии и сил сопротивления.

При периодических колебаниях скорости коэффициент неравномерности можно обеспечить путем установки на одном из быстроходных валов механизма инерционного колеса, называемого *маховиком*. Для регулирования непериодических и случайных колебаний скорости применяются *регуляторы скорости*.

Маховик представляет собой колесо (рис. 10.7, где 1 - обод, 2 - центр, 3 - ступица) со значительным моментом инерции J_m относительно оси вращения. Влияние маховика на уменьшение амплитуды колебаний угловой скорости сводится к следующему. Маховик устанавливается на быстроходном валу механизма и вращается с угловой скоростью ω . Всякое изменение скорости влечет за собой возникновение момента сил инерции маховика $M_u = J_m d\omega/dt$, который препятствует изменению скорости вала. Чем больше момент инерции маховика, тем больше момент сил M_u , а следовательно, и сопротивление изменению угловой скорости вала.

Маховик является аккумулятором кинетической энергии. Если в механической системе разность работ A_d сил движущих и A_c сил сопротивления $\Delta A = A_d - A_c > 0$, то угловая скорость возрастает, и маховик накопит энергию. Напротив, при недостатке движущей энергии угловая скорость маховика снижается, и он становится дополнительным источником движущих сил. Это свойство маховика дает возможность использовать его в технике как для регулирования скорости движения в механизмах, так и в качестве инерционного двигателя различных транспортных средств.

Основной параметр маховика - момент инерции относительно оси вращения OO (рис. 10.7).

$$J_m = \frac{\Delta A_{\max}}{[\delta] \cdot \omega_{cp}^2}, \quad (10.11)$$

где $\Delta A_{\max} = (A_d - A_c)_{\max}$ - наибольшая избыточная работа движущих сил и сил сопротивления за промежуток времени изменения угловой скорости от ω_{\min} до ω_{\max} .

Массу и размеры маховика определяют на основании найденного момента инерции

$$J_m = \frac{mD^2}{4}, \quad (10.12)$$

где m - масса маховика (предполагается, что она распределена по ободу равномерно); D - диаметр инерции маховика, который равен диаметру окружности, описываемой центрами тяжести сечений обода. Величину mD^2 принято называть *маховым моментом*.

Диаметр D назначают конструктивно с учетом условия прочности маховика. Если принять массу обода маховика $m_{об} = 0,9 m$, плотность материала 7800 кг/м^3 , соотношение размеров обода $c = 0,4b$ (см. рис. 10.7), то ширина обода в (m) определится из выражения,

$$b \cong 0,01 \sqrt{m/D}. \quad (10.13)$$

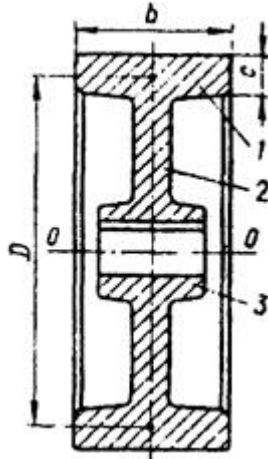


Рис. 10.7. Маховик

10.4. Коэффициент полезного действия механизмов

Качество механизмов принято оценивать по соотношению работ движущих сил, сил полезных и вредных сопротивлений. Для этого рассматривают период установившегося движения, так как при разгоне часть работы движущих сил расходуется на приращение кинетической энергии механизма, а при выбеге работа движущих сил равна нулю.

В период установившегося движения

$$A_d = A_{пс} + A_{вс} \quad (10.14)$$

где A_d - работа движущих сил; $A_{пс}$ - работа сил полезных сопротивлений, для преодоления которых создана машина; $A_{вс}$ - работа сил вредных сопротивлений, затрачиваемая на преодоление сил трения в кинематических парах и сопротивление среды.

Разделив левую и правую части уравнения (10.14) на A_d , получим

$$\frac{A_{пс}}{A_d} + \frac{A_{вс}}{A_d} = 1. \quad (10.15)$$

Отношение $A_{пс}/A_d = \eta$ называют *коэффициентом полезного действия* (КПД), а $A_{вс}/A_d = \psi$ - *коэффициентом потерь*.

Из (10.15) следует, что $\eta + \psi = 1$. Следовательно, чем больше КПД, тем меньше коэффициент потерь. В идеальном случае, когда вредные сопротивления отсутствуют, $\eta = 1$. Если при установив-

шемся движении изменение кинетической энергии незначительно, то отношение работ может быть заменено отношением мощностей

$$\eta = P_{пс}/P_d; \psi = P_{вс}/P_d$$

При проектировании новых механизмов необходимо уметь определять предполагаемый КПД расчетным путем в зависимости от схемы соединения отдельных механизмов между собой и от значения их КПД (эти данные имеются в соответствующих справочниках).

Отдельные механизмы, образующие сложный механизм, могут быть соединены последовательно, параллельно или иметь смешанный характер соединения [7].

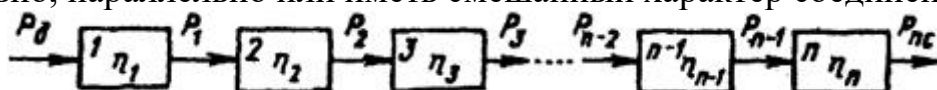


Рис. 10.8. Последовательное соединение механизмов

На рис. 10.8 показана схема *последовательного* соединения механизмов. Для каждого механизма значение КПД определяется уравнениями:

$$\eta_1 = P_1 / P_d; \eta_2 = P_2 / P_1; \eta_3 = P_3 / P_2; \eta_n = P_n / P_{n-1}.$$

Перемножая почленно эти равенства, получим

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n = P_n / P_d$$

Отношение $P_n / P_d = \eta_0$ представляет собой КПД сложного механизма

$$\eta_0 = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n \quad (10.16)$$

Таким образом, при последовательном соединении механизмов общий КПД равен произведению КПД отдельных механизмов.

На рис. 10.9 показана схема *параллельного* соединения отдельных механизмов. Как правило, задаются мощность полезного сопротивления P_{inc} и КПД η_i каждого механизма.

"1"

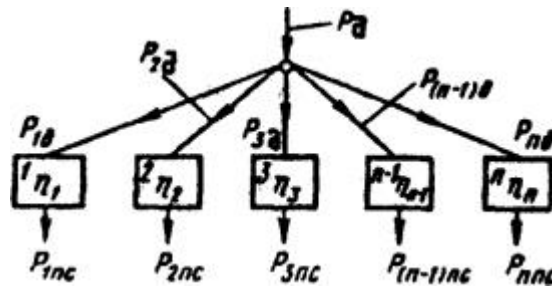


Рис. 10.9. Параллельное соединение механизмов

Общий КПД такой системы

P_d - мощность двигателя.

Каждый составляющий систему механизм передает лишь определенную долю энергии двигателя, которую можно учесть с помощью коэффициентов β_i :

$$\eta_0 = P_{nc\Sigma} / P_d \quad (10.17)$$

Рабочие органы потребляют мощность:

$$P_{nc\Sigma} = \sum_{i=1}^n P_{nci}$$

Подставив значение P_{nci} формулу (10.15), получим

$$\beta_1 = P_{d1} / P_d; \beta_2 = P_{d2} / P_d; \beta_n = P_{dn} / P_d; \text{при этом } \sum_{i=1}^n \beta_i = 1.$$

10.5. Уравновешивание звеньев

При вращении звена на его опоры действуют динамические реакции, т. е. реакции, зависящие от ускорений (иначе, от сил инерции). Для полного устранения этих реакций необходимо, чтобы главный вектор Fu и главный момент сил инерции Mu были равны нулю в любой момент движения:

$$P_{nc1} = P_{d1} \eta_1 = P_d \beta_1 \eta_1; P_{nc2} = P_{d2} \eta_2 = P_d \beta_2 \eta_2;$$

$$P_{ncn} = P_{dn} \eta_n = P_d \beta_n \eta_n;$$

153

Иногда ограничиваются выполнением только условия (10.19), которое равносильно условию постоянства положения центра масс звена, или, что то же, условию расположения центра масс на оси вращения звена. *Распределение массы звена,*

переводящее его центр масс на ось вращения, называется статическим уравниванием вращающегося звена.

Необходимость статического уравнивания быстро вращающихся звеньев поясним числовым примером.

В современных быстроходных механизмах инерционные нагрузки на звенья могут значительно превышать рабочие нагрузки. Например, если зубчатое колесо массой $m = 1$ кг насажено на вал с эксцентриситетом $e_{cm} = 0,5$ мм и вращается равномерно с частотой $n = 20\,000$ об./мин., то при угловом ускорении $\varepsilon = 0$ на вал действует центробежная сила инерции

$$F_u = m a_s^n = m \omega^2 e_{cm} = 1 (3,14 \cdot 2 \times 10^4 / 30)^2 \cdot 0,0005 = 2193 \text{ Н}.$$

Действие сил и моментов сил инерции увеличивает потери движущей энергии на трение, вызывает упругие колебания и при неблагоприятных условиях может стать причиной разрушения звеньев. Поэтому при конструировании механизмов и приборов инерционные нагрузки стремятся уменьшить. Этой же цели служит статическая и динамическая балансировка отдельных звеньев и уравнивание механизмов в целом с помощью специальных масс, называемых корректирующими. Рассмотрим балансировку звеньев, вращающихся относительно неподвижной оси [6].

Статическая балансировка. Пусть центр S масс диска (рис. 10.11, а) смещен относительно оси вращения на величину e_{cm} .

При вращении диска с угловой скоростью ω возникает центробежная сила инерции $F_u = -m(\omega^2 e_{cm})$. В общем случае главный вектор дисбалансов $D_{cm} = m e_{cm}$ характеризует статическую неуравновешенность звена. Условие статической уравновешенности любого звена

$$D_{cm} = m e_{cm} = 0 \quad (10.21)$$

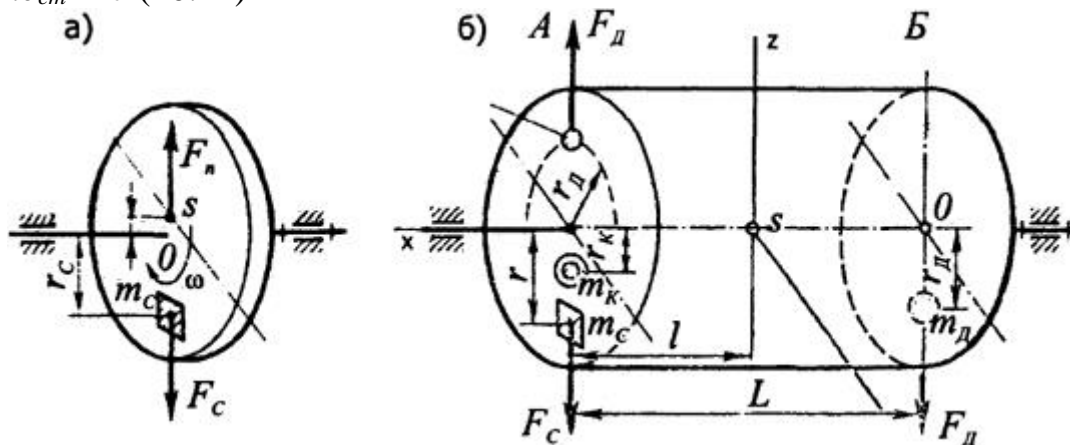


Рис. 10.11. Статическая (а) и динамическая (б) балансировка звеньев

Обеспечение этого условия может быть достигнуто путем установки корректирующей массы m_c (рис. 10.11, а) на расстоянии r_c от оси вращения так, чтобы создаваемая ею сила инерции $F_c = m_c \omega^2 r_c$ полностью уравнивала силу инерции диска $F_u = m \omega^2 e_{cm}$. Значение статической корректирующей массы m_c определяют из условия

$$m_c r_c = m e_{cm}; \quad m_c = m e_{cm} / r_c. \quad (10.22)$$

Положение точки на диске для размещения массы m_c находят с помощью специальных установок для статической балансировки.

Динамическая балансировка. При уравнивании сил инерции звеньев, имеющих небольшую длину по сравнению с диаметром (ролики, шкивы, зубчатые колеса и др.), можно ограничиться только статической балансировкой. Однако при значительной длине вращающихся звеньев дополнительно возникает *мо-ментная неуравновешенность*, суть которой рассмотрим на примере уравнивания ротора (рис. 10.11, б). Допустим, что статическое уравнивание ротора достигнуто установкой дополнительной массы m_c в плоскости A , в результате чего центр S масс ротора стал совпадать с осью вращения. Но при вращении ротора масса m_c , удаленная на расстояние r от оси (рис. 10.11, б), создает

неуравновешенный момент сил инерции относительно оси y : $M_y = m_c r \omega^2$, который дополнительно нагружает опоры вала ротора. Величина $D_\delta = m_c r l$, характеризующая моментную неуравновешенность звена, называется *динамическим дисбалансом*.

Для уравнивания момента M_y (без нарушения статического равновесия) разместим в плоскостях коррекции A и B ротора две равные дополнительные массы m_δ , которые создадут пару сил инерции с моментом $M_\delta = m_\delta r_\delta L \omega^2$. Из условия $M_\delta = M_y$ получим

$$m_\delta r_\delta L \omega^2 = m_c r l \omega^2, \text{ откуда} \\ m_\delta = m_c r l / (r_\delta L). \quad (10.23)$$

Помещенные в плоскости A ротора две массы m_c и m_δ можно заменить одной корректирующей массой m_k расположив ее на удобном по технологическим условиям расстоянии r_k от оси вращения. Из равенства $m_k r_k \omega^2 = m_c r \omega^2 - m_\delta r_\delta \omega^2$ находим

$$m_k = (m_c r - m_\delta r_\delta) / r_k \quad (10.24)$$

Динамическая балансировка звеньев осуществляется на универсальных балансировочных станках.

Контрольные вопросы

1. Каковы задачи и аксиомы динамики?
2. В чем заключается кинетостатическое исследование механизма?
3. Какие силы действуют в механизмах?
4. Как определить направления силы инерции, силы полезного сопротивления, момента сил инерции?
5. Чем характеризуется реакция в кинематической паре?
6. Какова последовательность силового анализа механизма?
7. Какие виды трения вы знаете?
8. В чем отличие силы трения покоя и силы трения движения?
9. Из каких стадий состоит движение механизма?
10. Как определяется коэффициент неравномерности хода?
11. Какие бывают колебания угловой скорости звена?
12. Для чего применяется маховик?
13. Что называют коэффициентом полезного действия?
14. Как определяется КПД при параллельном и последовательном соединении механизмов?
15. В чем заключается статическая балансировка звена?
16. В каких случаях проводят динамическую балансировку?

ЧАСТЬ 2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов - есть наука о расчете элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Основными задачами сопротивления материалов являются:

- 1) выбор расчетной схемы конструкции;
- 2) по внешним нагрузкам, действующим на конструкцию, определяются внутренние усилия;
- 3) по внутренним усилиям подбираются поперечные размеры элемента конструкции или, наоборот, проверяют прочность заданных размеров элементов конструкции.

§ 1. Основные понятия, определения и допущения

Сопротивление материалов в своих исследованиях использует законы и теоремы теоретической механики, и, в первую очередь, законы статики, а также экспериментальные данные, получаемые при испытаниях материала.

В то же время имеются отличия от теоретической механики:

- 1) теоретическая механика рассматривает абсолютно жесткие тела; сопротивление материалов - деформируемые тела;
- 2) в теоретической механике силу можно переносить по линии ее действия, чего нельзя сделать в сопротивлении материалов, т.к. перенос силы может изменить характер нагружения (см. рис. 1);
- 3) в теоретической механике систему параллельных сил можно заменить равнодействующей; в сопротивлении материалов этого сделать нельзя при определении прогибов (см. рис. 2а и 2б).

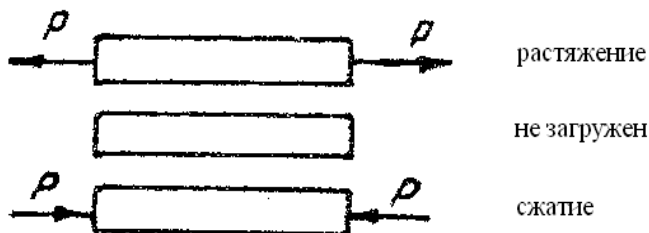


Рис. I

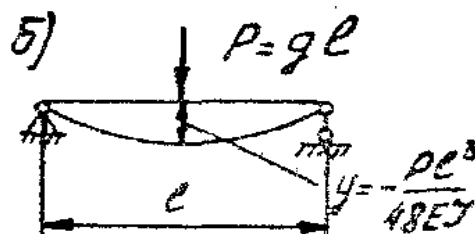
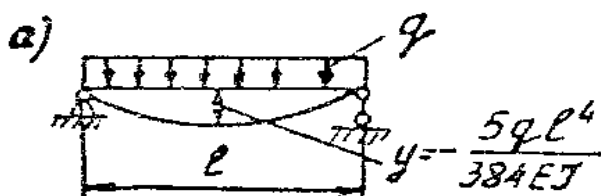


Рис. 2

Каждый расчет начинается с выбора расчетной схемы. Выбор такой схемы заключается в схематизации рассматриваемого объекта путем отбрасывания несущественных факторов.

Все тела приводятся к схеме бруса, пластинки или оболочки. Брусом называют тело, одно из измерений которого много больше двух других. Брус может иметь сечение постоянное или переменное вдоль оси. Брус, имеющий прямолинейную ось, называется стержнем. Стержень, работающий главным образом на изгиб, называется балкой, на кручение - валом.

Под пластинкой понимают тело, у которого одно из измерений (толщина) много меньше двух других. Искривленная пластинка в одном или двух направлениях называется оболочкой.

Внешние силы, по своему характеру приложения, подразделяются на поверхностные, действующие по поверхности тела, и объемные, действующие по всему объему тела.

Поверхностные силы делятся на сосредоточенные и распределенные. Сосредоточенные силы действуют на весьма малых площадях поверхности тела. Распределенная нагрузка приложена непрерывно на протяжении некоторой площади или длины тела. Величина распределенной нагрузки, приходящаяся на единицу площади или длины тела, называется интенсивностью нагрузки и обозначается q . При действии нагрузки на конструкцию возникает противодействие в виде реакций связей. Нагрузки вместе с реакциями составляют внешние силы. По характеру действия нагрузки бывают статические, которые прикладываются от нуля до определенного значения и затем не меняют своей величины, и динамические, действующие в очень короткие промежутки времени; когда в элементах конструкции возникают значительные ускорения.

Под действием внешних сил все твердые тела изменяют свою форму и размеры. Такое изменение называется деформацией.

Различают деформацию абсолютную и относительную. Деформация, характеризующая изменение линейных размеров тела, называется линейной, а деформация, связанная с изменением формы, называется угловой.

В сопротивлении материалов, в основном, рассматриваются упругие деформации, которые являются весьма малыми по сравнению с размерами тела.

Остановимся теперь на определении внутренних сил в любом сечении тела. Для определения внутренних сил в любом сечении тела служит метод сечений. Сущность этого метода заключается в следующем. (См. рис. 3).

Мысленно делается сечение в теле, в результате чего тело рассекается на две части. Отбрасываем одну из частей, например, левую. Для того чтобы оставшаяся (правая) часть находилась в равновесии, по всему сечению прикладываем силы, равные силам взаимодействия левой части на правую. Значения этих сил определяются из уравнений статики, составленных для правой части. Аналогичный результат получим, если отбросим правую часть и будем рассматривать левую. Силы в сечении, будучи внешними силами, для выделенной части, являются внутренними силами для целого тела.

Метод сечений дает возможность определить только сумму внутренних сил в каком-нибудь сечении. Согласно законам теоретической механики все силы в сечении можно привести к главному вектору \bar{R} и главному моменту \bar{M} . Раскладывая \bar{R} и \bar{M} по координатным осям X , Y и Z с началом координат в центре тяжести сечения, получим три составляющие главного вектора N_z , Q_x , Q_y и три со-

ставляющие главного момента M_x , M_y и M_z . Все шесть составляющих принято называть внутренними силовыми факторами. Каждый из шести силовых факторов имеет свое название.

N_z - носит название продольной силы; Q_x , Q_y - поперечные силы; M_x , M_y - изгибающие моменты; M_z - крутящий момент.

Иллюстрация метода сечений и приведение внутренних сил в сечении к главному вектору и главному моменту и их составляющие, приводится на рис.3б, 3в, 3г, 3д, 3е.

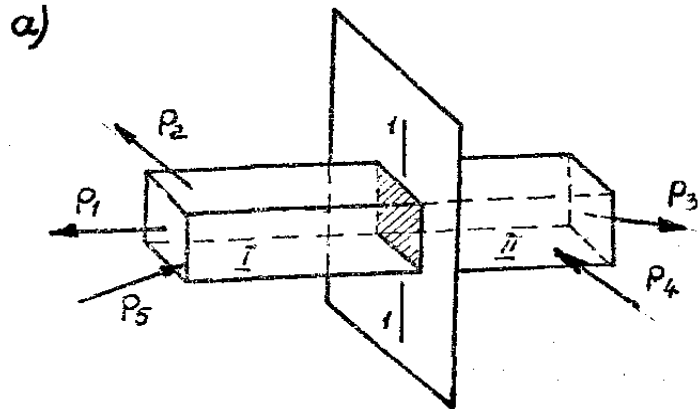


Рис.3 а

Рассмотрим сечение некоторого тела, рис. 4а.

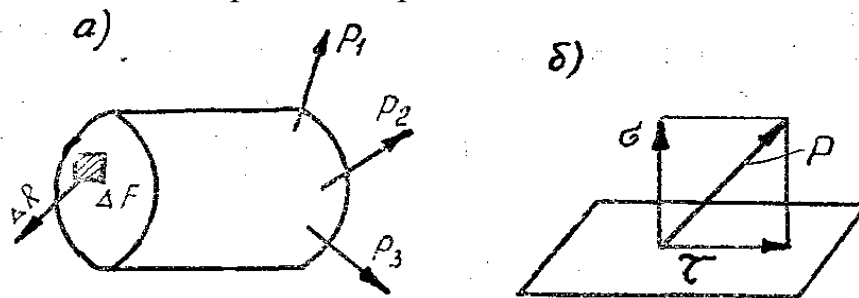


Рис.4

За среднее напряжение на элементарной площадке ΔF принимается отношение:

$$\frac{\Delta R}{\Delta F} = P_{cp}, \Delta R - \text{внутренняя сила в пределах площадки } \Delta F.$$

$$\text{В пределе получим: } \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F} = \frac{dR}{dF} = P,$$

где P - полное напряжение в точке рассматриваемого сечения.

Векторная величина P - есть полное напряжение в точке.

Полное напряжение P может быть разложено на составляющие, рис. 4б.

Проекция вектора полного напряжения на нормаль называется нормальным напряжением и обозначается через σ , а составляющая, которая расположена в плоскости сечения, называется касательным напряжением и обозначается через τ .

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

§ 2. Внутренние силы и напряжения

Под растяжением (сжатием) понимается такой вид деформации, когда при нагружении в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные напряжения.

Примером растяжения может служить брус, растягиваемый силами, приложенными к его концам.

Для определения внутренних сил и напряжения для примера рассмотрим стержень с постоянной площадью поперечного сечения $F \text{ см}^2$, который подвергается растяжению силами P , рис. 5. При этом предполагается, что плоские сечения, нормальные к оси стержня до деформации, остаются и после деформации плоскими и нормальными к его оси. Эта гипотеза называется гипотезой плоских сечений. Внутренние силы и напряжения в любом сечении бруса определяются с помощью метода сечений.

Плоскостью, перпендикулярной к оси бруса мысленно разрежем его по данному сечению и отбросим одну из полученных двух частей, например, правую. Для обеспечения равновесия

оставшейся части приложим по всему сечению в каждой его точке внутренние силы, которые должны заменить действие отброшенной части на оставшуюся часть бруса.

Равнодействующая внутренних сил N легко определяется из условия равновесия с помощью уравнения статики: $\sum X = N - P = 0$, откуда $N=P$.

Если считать, что внутренние силы равномерно распределены по сечению, то нормальные напряжения во всех точках сечения будут одинаковыми и могут быть определены по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F}, \quad (2.1)$$

где F – площадь поперечного сечения.

§ 3. Продольные и поперечные деформации. Коэффициент Пуассона. Закон Гука.

При действии растягивающих сил по оси бруса длина его увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются. При действии сжимающих усилий происходит обратное явление. На рис. 6 показан брус, растягиваемый двумя силами P . В результате растяжения брус удлинился на величину Δl , которая называется абсолютным удлинением, и получим абсолютное поперечное сужение Δa .

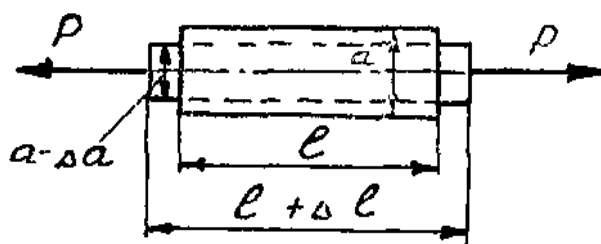


Рис. 6

Отношение величины абсолютного удлинения и укорочения к первоначальной длине или ширине бруса называется относительной деформацией. В данном случае относительная деформация

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \text{ называется } \underline{\text{продольной де-}}$$

формацией, а $\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}$ - относитель-

ной поперечной деформацией. Отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации называется коэффициентом Пуассона:

$$\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \quad (3.1)$$

Коэффициент Пуассона для каждого материала как упругая константа определяется опытным путем и находится в пределах: $\mu = 0 \div 0,5$; для стали $\mu = 0,3$.

В пределах упругих деформаций установлено, что нормальное напряжение прямо пропорционально относительной продольной деформации. Эта зависимость называется законом Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (3.2)$$

где E - коэффициент пропорциональности, называемый модулем нормальной упругости.

Если мы в формулу закона Гука подставим выражение $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ и $\sigma = \frac{P}{F}$, то получим формулу для определения удлинения или укорочения при растяжении и сжатии:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F}, \quad (3.3)$$

где произведение EF называется жесткостью при растяжении, сжатии.

§ 4. Понятие о допускаемом напряжении. Коэффициент запаса прочности.

Выше указывалось, что для обеспечения надежной работы любого сооружения и его долговечности необходимо, чтобы каждая его составная часть (элемент конструкции) была прочной, т.е. чтобы она была гарантирована от разрушения за все время эксплуатации. Поэтому действительные напряжения во всех частях сооружения не должны превышать определенного предела для того или иного материала, а именно, они должны быть значительно меньше так называемых опасных (предельных) напряжений, которыми являются предел прочности σ_b - для хрупких материалов и предел текучести σ_T - для пластичных материалов.

Наибольшее напряжение, при котором обеспечивается длительная работа конструкции без риска ее разрушения называется допускаемым напряжением. Оно обо-

значается той же буквой, что и действительное напряжение, но заключенной в квадратные скобки $[\sigma]$.

Таким образом, величина допускаемого нормального напряжения $[\sigma]$ должна составлять некоторую часть от предела прочности σ_b или предела текучести σ_t . Число, показывающее, во сколько раз допускаемое напряжение меньше предела прочности или предела текучести, называется коэффициентом запаса прочности и обозначается буквой K .

Следовательно, величина допускаемого напряжения для хрупких материалов может быть выражена формулой:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_s}{K} \quad (4.1)$$

Для пластичных материалов, которые могут получать значительные остаточные деформации перед разрушением, за опасное напряжение принимается предел текучести σ_t . Так как величина предела текучести при растяжении и сжатии у пластичных материалов почти одна и та же, то и допускаемые напряжения для них при растяжении и сжатии часто назначаются одинаковыми, т.е.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{K} \quad (4.2)$$

При выборе допускаемого напряжения, что является крайне ответственной задачей, необходимо учитывать многие факторы, влияющие на его величину. Очень важное значение имеет, например, род применяемого материала. Хрупкие материалы, почти не дающие остаточных деформаций, разрушаются внезапно, а поэтому коэффициент запаса прочности для них назначается больше, чем для пластичных материалов, имеющих площадку текучести.

Для пластичных материалов коэффициент запаса прочности " K " принимается равным 1,5 ... 2,0, для хрупких – 3 ... 4.

§ 5. Расчеты на прочность при растяжении и сжатии

Под расчетом элемента конструкции будем понимать совокупность действий, в результате которых можно получить ответ на вопрос, удовлетворяет ли конструкция или ее элемент требованиям надежности и долговечности, которые были сформулированы в самом начале изложения предмета. Напомним, что для достижения полной гарантии надежности и долговечности сооружения необходимо, чтобы все его элементы были прочны, жестки и устойчивы.

Рассмотрим сначала вопрос расчета элемента конструкции на прочность при растяжении и сжатии:

Имеются два метода расчета на прочность;

- 1) метод расчета по допускаемым напряжениям,
- 2) метод расчета по предельным состояниям (допускаемым нагрузкам).

Первый метод (по допускаемым напряжениям) применяется для расчета элементов конструкций, в которых по условиям эксплуатации допустимы, как правило, лишь весьма малые упругие деформации, например, для деталей машин и механизмов.

Второй метод (по допускаемым нагрузкам) принят для расчета элементов конструкций гражданских и промышленных зданий, а также для расчета определенных инженерных сооружений и конструкций, изготавливаемых из пластичных материалов.

Сущность метода расчета по допускаемым напряжениям сводится к требованию, чтобы действительное напряжение в точках любого поперечного сечения элемента конструкций не превышало допускаемого напряжения для данного материала. Поэтому условие прочности для растягиваемого или сжимаемого бруса можно выразить следующей расчетной формулой:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma] \quad (5.1)$$

Полученная формула читается так: нормальное напряжение в каждой точке любого поперечного сечения бруса не должно превышать допускаемого напряжения материала.

Практические расчеты на растяжение и сжатие сводятся к определению одной из неизвестных величин, входящих в эту формулу по двум известным или легко определяемым из условий задач (величина $[\sigma]$ обычно известна). Применение расчетной формулы позволяет решить три рода задач на растяжение, сжатие.

1. Даны размеры поперечного сечения стержня (или его площадь F) и величина продольной силы N (или имеются все данные для ее определения). Требуется определить величину наибольшего напряжения в сечении стержня. Для данного случая при решении задачи следует пользоваться формулой:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma].$$

В результате решения может оказаться, что величина действительного напряжения в сечении σ превышает допускаемое напряжение $[\sigma]$, тогда необходимо или увеличить площадь поперечного сечения, или, если это возможно, уменьшить нагрузку.

Разрешается превышение или понижение действительных напряжений по сравнению с допускаемым до $\pm 5\%$.

2. Известна или может быть определена из условия задачи величина продольной силы N в сечении и допускаемое напряжение материала $[\sigma]$; требуется определить необходимую площадь F поперечного сечения стержня или, как говорят, подобрать его сечение. В этом случае задача решается по формуле:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]} \quad (5.2)$$

3. Даны размеры поперечного сечения, а также допускаемое напряжение материала; требуется определить значение наибольшей нагрузки на стержень.

Из формулы (5.1) получаем:

$$N = [\sigma] \cdot F. \quad (5.3)$$

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

§ 6. Понятие о сдвиге (срезе)

Под сдвигом понимается угловая деформация, которая численно равна изменению величины первоначально прямого угла в радианах и обозначается γ .

Для демонстрации явления сдвига рассмотрим элементарный прямоугольник ABDC, рис.7.

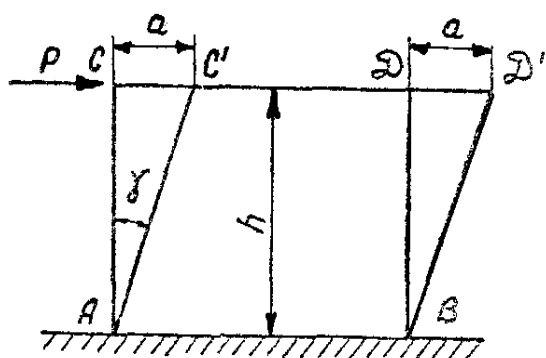


Рис.7

После деформации прямоугольник ABDC превращается в параллелограмм ABD'C'. Величина $CC' = a$, на которую сечение CD сдвинулось относительно соседнего сечения АВ, называется абсолютным сдвигом.

Угол γ , на который изменился прямой угол параллелепипеда, называется относительным сдвигом и является мерой сдвига. В области упругих деформаций этот угол очень мал и может быть определен как:

$$\frac{CC'}{AC} = \frac{a}{h} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$$

Здесь в силу малости угла тангенс его можно заменять самим углом. Из формулы видно, что относительный сдвиг - есть отношение абсолютного сдвига к расстоянию между рассматриваемыми сдвигаемыми сечениями.

Для определения внутренних сил в сечении стержня, между двумя срезающими силами P применим метод сечений. Для этого отбросим одну часть тела относительно интересующего нас сечения, а действие отброшенной части на оставшуюся заменим внутренними силами, рис.8.

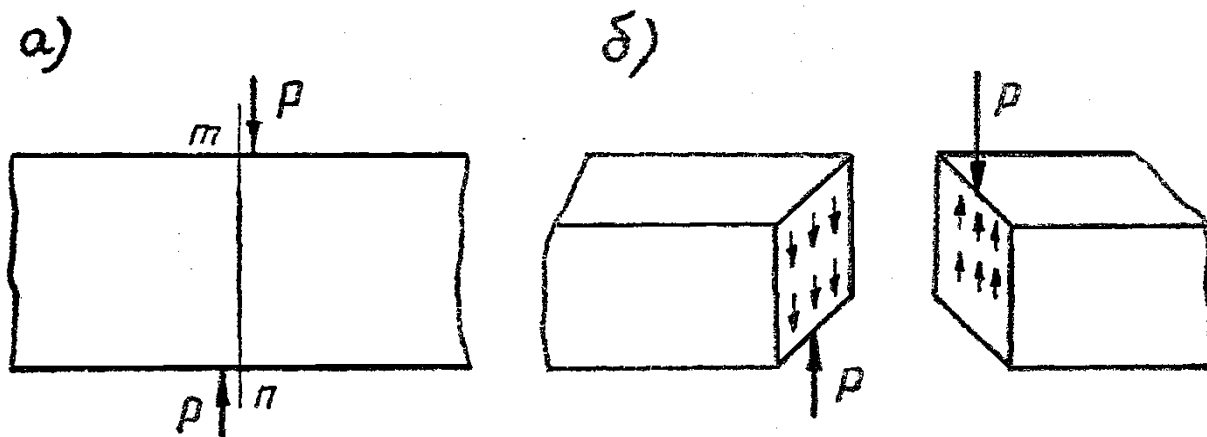


Рис.8

Согласно рис. 8б внутренние силы должны вызывать касательные напряжения, которые при условии равномерного их распределения по сечению можно определить:

$$\tau = \frac{P}{F}, \quad (6.1)$$

где F - площадь поперечного сечения;
 P - сдвигающая (срезающая) сила.

Экспериментально подтвержден для случая сдвига закон Гука:

$$a = \frac{P \cdot h}{G \cdot F}$$

где $\frac{1}{G}$ - коэффициент пропорциональности, зависящий от природы материала.

Зная, что $\frac{a}{h} = \gamma$ и $\frac{P}{F} = \tau$ можем перейти к следующему виду закона Гука:

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (6.2)$$

где G – есть модуль сдвига или модуль упругости второго рода.

Модуль сдвига обычно составляет некоторую часть от модуля нормальной упругости E :

$$G \cong 0,4 \cdot E, \quad (6.3)$$

а точная зависимость между упругими постоянными:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}, \quad (6.4)$$

где μ - коэффициент Пуассона.

Модуль сдвига для стали $G = 8 \cdot 10^5$ кг/см².

Расчетное уравнение при сдвиге:

$$\tau = \frac{P}{F} \leq [\tau], \quad (6.5)$$

где $[\tau]$ - допускаемое касательное напряжение.

Чистым сдвигом называется такой случай плоского напряженного состояния, при котором по двум взаимно-перпендикулярным площадкам действуют лишь касательные напряжения, а нормальные напряжения равны нулю.

§ 7. Кручение

Под кручением понимают такой вид деформации, когда в поперечных сечениях бруса возникают крутящие моменты.

Результаты опытов над кручением круглого бруса позволили принять следующие допущения при изучении теории кручения:

- 1) плоские поперечные сечения круглого бруса остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений);
- 2) радиусы, проведенные в поперечных сечениях, после деформации сохраняют свою длину;
- 3) углы поворота сечения тем больше, чем дальше сечение отстоит от мест закрепления;
- 4) образующие стержня превращаются в винтовые линии, т.е. происходит сдвиг частиц, и в поперечных сечениях возникают касательные напряжения;

5) принимается закон Гука, т.е. соблюдается пропорциональность между крутящим моментом и углом закручивания в пределах упругих деформаций.

Для определения касательных напряжений применим метод сечений. Мысленно вырежем из круглого бруса элемент радиусом r и длиной dz (рис.9а), из которого в свою очередь, вырежем другой элемент произвольного радиуса ρ (рис. 9б).

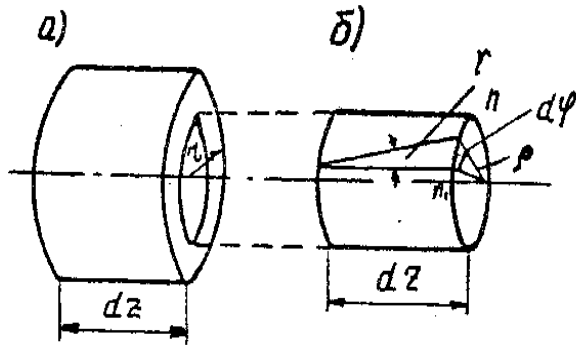


Рис.9

Положим, что разность полных сдвигов двух сечений на бесконечно малом расстоянии dz будет nn_1 , тогда относительный сдвиг

$$\gamma = \frac{nn_1}{dz};$$

Если обозначить весьма малую разность полных углов закручивания на длине dz через $d\varphi$ можно написать $nn_1 = \rho \cdot \varphi$.

Тогда выражение для относительного сдвига представится в виде:

$$\gamma = \frac{nn_1}{dz} = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz}$$

Используем закон Гука при сдвиге $\tau = G \cdot \gamma$. Подставив в эту формулу выражение для относительного сдвига, получим пока еще не окончательную формулу касательного напряжения в произвольной точке рассматриваемого сечения:

$$\tau = G \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz}, \quad (7.1)$$

где ρ - расстояние от этой точки до оси бруса.

Величина элементарной внутренней касательной силы в произвольной точке сечения равна $\tau \cdot dF$; момент этой силы, действующей по площадке dF относительно оси бруса $dM = \tau \cdot dF \cdot \rho$

Полный момент внутренних касательных сил относительно оси бруса будет равен:

$$M_{\kappa} = \int_F \tau \cdot \rho \cdot dF, \quad (7.2)$$

а так как $\tau = G \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz}$, то можно написать

$$M_{\kappa} = \int_F G \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho \cdot dF$$

$$\text{или } M_{\kappa} = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \int_F \rho^2 \cdot dF \quad (7.3)$$

Но интеграл $\int_F \rho^2 \cdot dF = I_p$ представляет собой полярный момент инерции площади сечения, поэтому

$$M_k = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot I_p, \quad (7.4)$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_k}{G \cdot I_p}, \quad (7.5)$$

где $d\varphi$ - элементарный угол закручивания на длине dz .

Полный угол закручивания:

$$\varphi \int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{M_k}{G \cdot I_p} \cdot dz = \frac{M_k}{G \cdot I_p} \cdot \int_0^l dz = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p}$$

или окончательно

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p} \quad (7.6)$$

Произведение $G \cdot I_p$ называют жесткостью сечения бруса при кручении.

Из полученной формулы (7.6) следует, что величина угла закручивания φ прямо пропорциональна крутящему моменту M_k и длине бруса l и обратно пропорциональна жесткости сечения при кручении $G \cdot I_p$.

Величина угла закручивания φ измеряется в радианах. Чтобы подучить φ в градусах, необходимо применять формулу:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \quad (7.7)$$

Подставляя в выражение (7.1) значение (7.5), получим формулу для определения касательных напряжений:

$$\tau = \frac{G \cdot \rho \cdot M_k}{G \cdot I_p} = \frac{M_k}{I_p} \cdot \rho,$$

окончательно -

$$\tau = \frac{M_k}{I_p} \cdot \rho \quad (7.8)$$

В формуле (7.8) величина $\frac{M_k}{I_p}$ постоянная для рассматриваемого сечения, следовательно, касательные напряжения изменяются прямопропорционально расстоянию ρ .

Наибольшее значение величины касательных напряжений будет в крайних точках сечения бруса, т.е. при $\rho = \rho_{\max} = r$

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{I_p} \cdot \rho_{\max} = \frac{M_k}{\frac{I_p}{r}} = \frac{M_k}{W_p} \quad (7.9)$$

Величина $W_p = \frac{I_p}{r}$ называется полярным моментом сопротивления сечения бруса.

§ 8. Полярный момент сопротивления круга и кольца, расчет круглых брусьев на прочность и жесткость при кручении

Величина полярного момента инерции площади круга:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cong 0,1 \cdot d^4 (\text{см}^4) \quad (8.1)$$

Выразив величину полярного момента сопротивления тоже через диаметр, получим:

$$W_p = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cong 0,2 \cdot d^3 (\text{см}^3) \quad (8.2)$$

Из формулы (7.8) следует, что касательные напряжения в точках сечения, близких к центру, т.е. при малых ρ , незначительны. Значит, крутящий момент обусловлен, главным образом, напряжениями, действующими в части сечения, наиболее удаленной от центра, а материал центральной части бруса (вала) используется мало. Поэтому с целью облегчения вала нередко изготавливают их полыми (кольцевого сечения) (рис. 10). Для расчета диаметра такого вала нужно уметь определять вели-

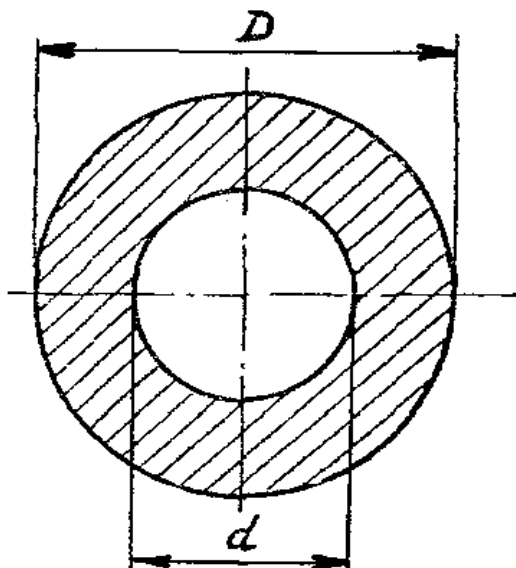


Рис. 10

чину полярного момента сопротивления его сечения.

Обозначим наружный диаметр D , а внутренний d . Тогда полярный момент инерции кольцевого сечения определится как разность полярных моментов инерции внешнего и внутреннего кругов:

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} - \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32} \cong 0,1 \cdot (D^4 - d^4)$$

Полярный момент сопротивления кольцевого сечения:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D} \cong 0,2 \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$$

Задавшись отношением диаметров $\frac{d}{D} = C$ или $d = C \cdot D$, получим формулы:

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - C^4), \quad (8.3)$$

$$W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - C^4). \quad (8.4)$$

Если известна величина полярного момента сопротивления сечения, можно определить наибольшее значение касательного напряжения по формуле (7.9); при этом, по условию прочности оно не должно быть больше допускаемого, т.е.

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau]. \quad (8.5)$$

Полученное уравнение (8.5) является расчетным уравнением при кручении. Подбор диаметра вала из условия прочности производят по формуле:

$$W_p = \frac{M_k}{[\tau]}. \quad (8.6)$$

Подставив в эту формулу значение полярного момента сопротивления

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}, \text{ получим: } \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{M_k}{[\tau]}$$

$$\text{откуда } d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_k}{\pi \cdot [\tau]}} \cong \sqrt[3]{\frac{M_k}{0,2 \cdot [\tau]}}, \quad (8.7)$$

$$\text{или } d = 1,72 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_k}{[\tau]}}. \quad (8.8)$$

По формуле (8.5) можно также определить наибольший крутящий момент:

$$M_k = W_p \cdot [\tau]. \quad (8.9)$$

Кроме условия прочности, к валу предъявляют требование жесткости. Оно состоит в том, чтобы угол закручивания вала на единице его длины не превышал определенной, наперед заданной величины. При расчете длинных валов условие жесткости предъявляется в первую очередь.

Расчетное уравнение из условия жесткости будет:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p} \leq [\varphi], \quad (8.10)$$

где $[\varphi]$ - допускаемый угол закручивания.

Перейдем к углу закручивания на длине одного метра вала:

$$\varphi^0 = \frac{M_k \cdot 100}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180^0}{\pi}. \quad (8.11)$$

Подставляя в это уравнение выражение для полярного момента инерции

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \text{ получим расчетную формулу для определения диаметра вала из}$$

условия жесткости:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_k \cdot 100 \cdot 180^0}{G \cdot \pi^2 \cdot [\varphi]}} = 15,3 \cdot \sqrt[4]{\frac{M_k}{G \cdot [\varphi]}} \text{ (°пог.м)}. \quad (8.12)$$

Для полых валов расчетная формула будет иметь вид:

$$D = 15,3 \cdot \sqrt[4]{\frac{M_k}{G \cdot (1 - C^4) \cdot [\varphi]}}, \quad (8.13)$$

где D - внешний диаметр вала;

$C = \frac{d}{D}$ - отношение внутреннего и внешнего диаметров вала.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

§ 9. Напряжения в наклонных сечениях при одноосном растяжении (сжатии). Закон парности касательных напряжений

Все сказанное до сих пор о напряжениях, возникающих в сечениях растянутого (сжатого) бруса, относилось к поперечным сечениям, которые перпендикулярны к оси бруса. Теперь рассмотрим напряжения, возникающие при осевом растяжении и сжатии в наклонных (косых) сечениях. Это позволит выяснить общую картину напряжений, возникающих в различных сечениях, получить зависимости для определения напряжения, возникающего по любой площадке, и определить, под каким углом располагаются те сечения, в которых напряжения достигают наибольших значений.

Возьмем прямой брус (рис. 11а), растягиваемый силой N , и определим напряжения в нем по наклонному сечению, составляющему с поперечным сечением угол α .

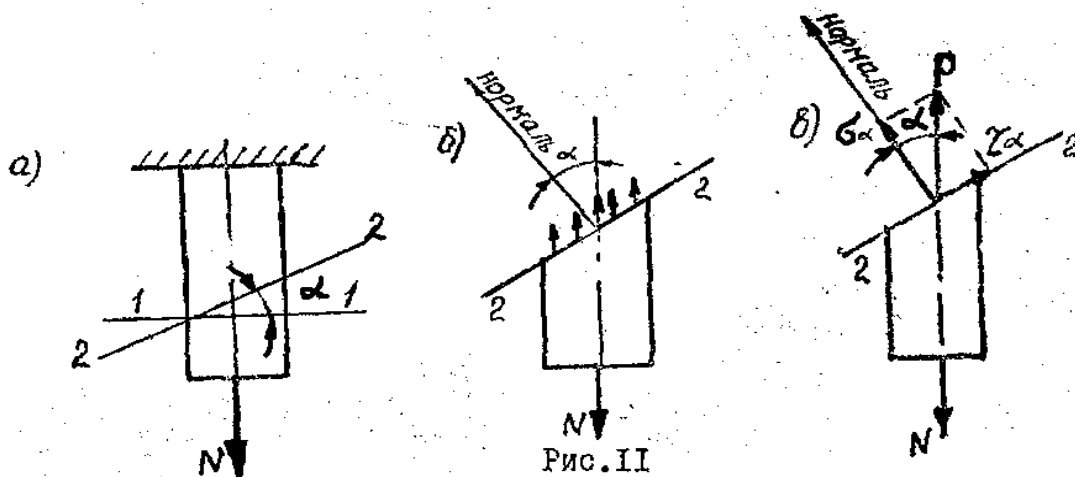


Рис. II

Внешняя нормаль составит с осью бруса также угол α , причем, последний отсчитывается в направлении против движения часовой стрелки от линии действия силы N до нормали к плоскости наклонного сечения (рис. 11б).

Рассечем мысленно брус сечением 2-2, отбросим верхнюю часть его и заменим действие отброшенной части на нижнюю внутренними силами, параллельными оси

бруса и распределенными равномерно по всему сечению. Равнодействующая этих сил будет равна растягивающей силе N.

Если через F обозначить площадь поперечного сечения 1 – 1, то площадь наклонного сечения 2 – 2 - $F_\alpha = \frac{F}{\cos \alpha}$, а полное напряжение в сечении:

$$p = \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N \cdot \cos \alpha}{F} = \sigma \cdot \cos \alpha, \text{ где } \sigma = \frac{N}{F}.$$

Величина P, следовательно, зависит от угла α : чем меньше угол α , тем больше напряжение P.

При $\alpha = 0$ сечение 2-2 совпадает с сечением 1-1, $\cos \alpha = 1$, тогда

$$p = \frac{N}{F} = \sigma, \text{ т.е. в этом случае полное напряжение будет равно нормальному осевому напряжению.}$$

При увеличении угла α до 90° , $\cos \alpha = 0$ и, стало быть $p = 0$; т.е. по площадкам, параллельным оси бруса, полное напряжение, а значит, и нормальное напряжение равно нулю.

Разложим напряжение p на составляющие в плоскости 2-2 и перпендикулярно к ней (рис. 11в). Составляющая, нормальная к площадке 2-2, представляет собой нормальное напряжение по наклонной площадке, а составляющая, действующая в самой площадке 2-2 - касательное напряжение.

Величина нормального напряжения:

$$\sigma_\alpha = p \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha,$$

а величина касательного напряжения:

$$\tau_\alpha = p \cdot \sin \alpha = \sigma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha,$$

или окончательно:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha, \quad (9.1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha. \quad (9.2)$$

Из полученных формул (9.1) и (9.2) следует, что оба вида напряжений по наклонному сечению зависят от величины угла α . Чем меньше угол α , тем больше будет нормальное напряжение.

При $\alpha = 0$ оно равно осевому нормальному напряжению, поскольку $\cos^2 0 = 1$.

С увеличением угла α нормальное напряжение σ_α убывает и при $\alpha = 90^\circ$; $\sigma_\alpha = 0$, так как $\cos 90^\circ = 0$. При $\alpha = 45^\circ$ нормальное напряжение в наклонном сечении:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha = \sigma \cdot \cos^2 45^\circ = \sigma \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\sigma}{2}$$

Касательное напряжение с изменением угла α от 0 до 90° сначала возрастает от нуля (при $\alpha = 0$) до наибольшего своего значения (при $\alpha = 45^\circ$):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2 \cdot 45^\circ = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 90^\circ = \frac{\sigma}{2};$$

а затем с увеличением угла от 45° касательное напряжение убывает и при $\alpha = 90^\circ$ становится равным нулю:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2 \cdot 90^\circ = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 180^\circ = 0.$$

Таким образом, наибольшие нормальные напряжения возникают по площадкам, перпендикулярным к оси бруса, а наибольшие касательные напряжения - по площадкам, расположенным под углом 45° к оси бруса и равны половине осевого нормального напряжения, т. е. $\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$.

По площадкам же, параллельным оси бруса (при $\alpha = 90^\circ$), $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$, т.е. в продольных плоскостях бруса не возникает ни нормальных, ни касательных напряжений. Отсюда следует, что между продольными волокнами растянутого (сжатого) бруса не возникает ни взаимного нажатия, ни отрыва.

В любом наклонном сечении бруса будут возникать одновременно оба вида напряжений: нормальные и касательные.

Теперь определим напряжения по сечению 3-3, перпендикулярному к сечению 2-2 (рис. 12а, б). Нормаль к площадке 3-3 составит с осью бруса угол $\alpha_1 = 270^\circ + \alpha$.

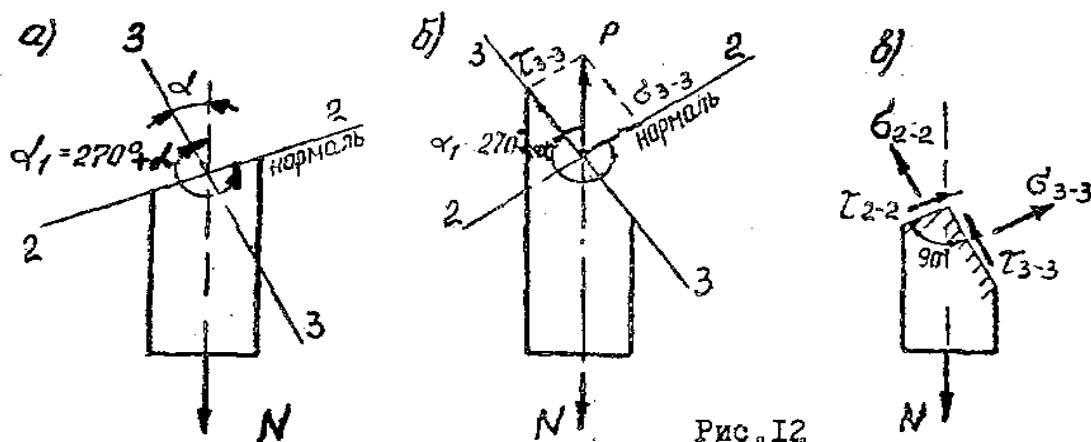


Рис. 12

Для определения нормального и касательного напряжений по площадке 3-3 применим формулы (9.1) и (9.2). Подставив в них значение угла

$\alpha_1 = 270^\circ + \alpha$, получим:

$$\sigma_{3-3} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha = \sigma \cdot \cos^2 (270^\circ + \alpha) = \sigma \cdot \sin^2 \alpha.$$

Касательные напряжения:

$$\tau_{3-3} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2 \cdot (270^\circ + \alpha) = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

Сравнивая формулы (9.1) и (9.2) с полученными, можно сделать следующие выводы:

а) величины нормальных напряжений по двум любым взаимно перпендикулярным сечениям различны, но сумма их постоянна и равна осевому нормальному напряжению, т.е.:

$$\sigma_{2-2} + \sigma_{3-3} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha + \sigma \cdot \sin^2 \alpha = \sigma \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \sigma$$

б) касательные напряжения по двум любым взаимно перпендикулярным сечениям равны по величине, но противоположны по знаку:

$$\tau_{2-2} = -\tau_{3-3}.$$

Следовательно, если представить себе брус разрезанным секущими площадками 2-2 и 3-3 (рис. 12в), то касательные напряжения по ним или сходятся к вершине прямого угла, или расходятся от нее. Это положение, справедливое не только в случаях растяжения или сжатия, но и для других деформаций, при которых возникают касательные напряжения, называется законом парности касательных напряжений. Он читается так: касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам и перпендикулярные к их общему ребру пересечения, численно равны между собой и направлены оба либо к ребру, либо от ребра (обратны по знаку).

§ 10. Напряжения в наклонных сечениях при плоском напряженном состоянии

Из напряженного тела выделим элементарный объем в виде треугольной призмы и рассмотрим ее равновесие (рис.13).

Будем считать, что горизонтальная и вертикальная грани призмы являются исходными площадками, по которым действуют заданные напряжения τ_{xy} и τ_{yx} .

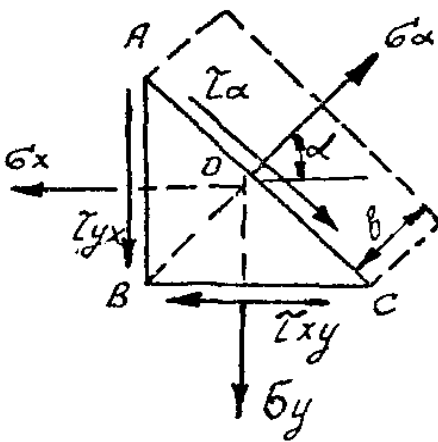


Рис.13

Определим нормальные и касательные напряжения σ_α и τ_α , действующие в наклонной площадке. Для этого спроектируем все силы, действующие на призму, на направление σ_α :

$$\begin{aligned} & \sigma_\alpha \cdot AC \cdot b - \sigma_x \cdot AB \cdot b \cdot \cos \alpha - \\ & - \sigma_y \cdot BC \cdot b \cdot \sin \alpha - \tau_{yx} \cdot AB \cdot b \cdot \sin \alpha - \\ & - \tau_{xy} \cdot BC \cdot b \cdot \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

Если выразим все стороны призмы через одну сторону AB и умножим все члены на $\cos \alpha$, получим при $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha + \tau_{yx} \cdot \sin 2\alpha. \quad (10.1)$$

Эту формулу можно преобразовать, учитывая, что

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Итак, получим:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha. \quad (10.2)$$

Теперь спроектируем все силы на направление τ_α :

$$\tau_\alpha \cdot AC \cdot b - \sigma_x \cdot AB \cdot b \cdot \sin \alpha + \sigma_y \cdot BC \cdot b \cdot \cos \alpha + \\ + \tau_{yx} \cdot AB \cdot b \cdot \cos \alpha - \tau_{xy} \cdot BC \cdot b \cdot \sin \alpha = 0$$

Делая аналогичные преобразования, как и при выводе формулы (10.2), будем иметь:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha. \quad (10.3)$$

§ 11. Главные площадки и главные напряжения. Обобщенный закон Гука.

Главными площадками называются такие взаимно перпендикулярные площадки, по которым действуют наибольшие и наименьшие нормальные напряжения, а касательные напряжения равны нулю. Напряжения, действующие по этим площадкам называются главными.

Для нахождения угла наклона главных площадок нужно найти максимум и минимум нормальных напряжений. Для этого возьмем первую производную от выражения (10.1) и приравняем ее к нулю:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2 \cdot \sigma_x \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + 2 \cdot \sigma_y \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha = 0, \quad (11.1)$$

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin 2\alpha + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha = 0. \quad (11.2)$$

После деления каждого члена уравнения на $\cos 2\alpha$ получим:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \tan 2\alpha + 2 \cdot \tau_{xy} = 0 \quad (11.3)$$

откуда
$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (11.4)$$

Учитывая, что $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$, получим:

$$\tan 2\alpha = -\frac{2 \cdot \tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (11.5)$$

Полученные формулы (11.5), (11.4) дают возможность определить угол наклона главных площадок – α .

Если α получится положительным, его следует отложить против часовой стрелки; и наоборот, если α отрицательный – по часовой стрелке.

Так как угол 2 отличается от другого значения на 180° , то α будет отличаться на 90° . Отсюда следует, что главные площадки взаимно перпендикулярны.

Подставив выражение (11.4) в (10.1), будем иметь формулу для определения величины главных напряжений:

$$\sigma_{\max \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}. \quad (11.6)$$

Как исходные нормальные напряжения σ_x, σ_y , так и главные считаются положительными, если они растягивающие и, наоборот, отрицательными, если они являются сжимающими.

За положительное касательное напряжение τ_{xy} принимается такое, которое может осуществить вращение по часовой стрелке, и, наоборот, против часовой стрелки - считается отрицательным.

Докажем, что в главных площадках касательные напряжения равны нулю. Для этого умножим все члены уравнения (11.2) на $-\frac{1}{2}$:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha = 0$$

Полученное выражение для касательных напряжений равно нулю, что и требовалось доказать (см. 10.3).

Различают три вида напряженных состояний

1. Объемное - когда все три главных напряжения отличны от нуля (рис.14в).
2. Плоское - когда одно из главных напряжений равно нулю (рис. 14б).
3. Линейное - когда два главных напряжения равны нулю (рис. 14а).

Главные напряжения обозначают через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Рассматривая их в порядке убывания, будем иметь: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. При линейном напряженном состоянии единственное отличное от нуля главное напряжение обозначится либо через σ_1 , если оно положительно (тогда $\sigma_2=0; \sigma_3=0$), либо через σ_3 , если оно отрицательно (тогда $\sigma_1=0; \sigma_2=0$). При плоском напряженном состоянии два отличных от нуля главных напряжения обозначаются либо через σ_1 и σ_2 , если оба положительны ($\sigma_3=0$), либо через σ_2 и σ_3 , если оба отрицательны ($\sigma_1=0$), либо через σ_1 и σ_3 , если они разнозначны ($\sigma_2=0$).

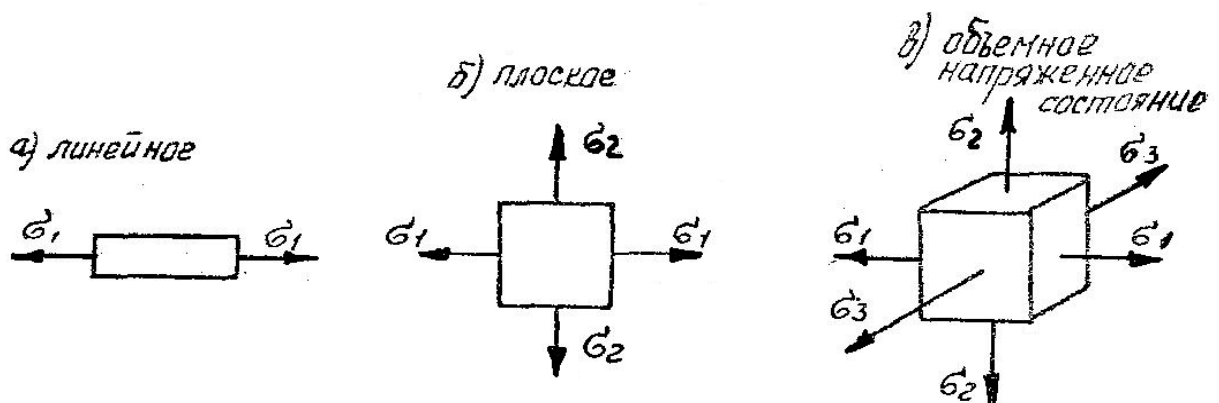


Рис. I4

Деформации в направлении главных напряжений - главные деформации в данной точке - определяются на основе обобщенного закона Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)], \quad (11.7)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1)], \quad (11.8)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)], \quad (11.9)$$

где μ - коэффициент Пуассона.

В частных случаях приведенные формулы упрощаются. Так, для линейного напряженного состояния с $\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\mu \cdot \frac{\sigma_1}{E}$$

В случае, когда напряженное состояние во всех точках тела одинаково, такое напряженное состояние называется однородным.

Обобщенный закон Гука относительно главных напряжений, для плоского напряженного состояния имеет вид:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_1 + \mu \cdot \varepsilon_2); \quad \sigma_2 = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_2 + \mu \cdot \varepsilon_1)$$

Относительная объемная деформация вычисляется по одной из формул:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3;$$

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2 \cdot \mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (11.10)$$

Напряжения на наклонных площадках вычисляются по формулам: при плоском напряженном состоянии:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin 2\alpha; \quad (11.11)$$

при линейном напряженном состоянии:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha, \quad (11.12)$$

где σ_α ; τ_α - соответственно нормальное и касательное напряжение в наклонной площадке, проведенной под углом α .

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Геометрическими характеристиками плоских сечений являются площадь, статические моменты плоских сечений, моменты инерции.

§ 12. Статические моменты и центры тяжести плоских сечений

Статическим моментом плоского сечения относительно оси, лежащей в плоскости сечения, называется взятая по всей площади сечения сумма произведений площадей элементарных площадок на их расстояния до этой оси (рис.15).

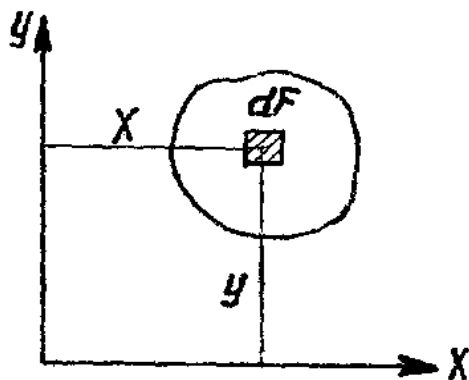


Рис. 15

Если известны координаты центра тяжести сечения, то статические моменты определяют по формулам:

$$S_x = F \cdot y_c; \quad S_y = F \cdot x_c$$

где F - площадь сечения.

Статические моменты плоских сечений могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Статические моменты сечения равны нулю относительно центральных осей. При практических расчетах редко приходится вычислять статические моменты путем интегрирования. Сложные сечения можно разбить на простейшие части, для каждой из которых известны площадь и координаты центра тяжести, т.е. статические моменты. Статический момент сложного сечения равен сумме статических моментов составляющих частей:

$$S_x = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + \dots + F_n \cdot y_n,$$

$$S_y = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + \dots + F_n \cdot x_n,$$

где F_1, F_2, \dots, F_n - площади отдельных частей сечения, на которые разбито сложное сечение;

x_1, x_2, \dots, x_n - координаты их центров тяжести относительно выбранных осей.

Зная статические моменты плоского сечения, можно вычислить координаты центра тяжести сечения относительно выбранных осей:

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + \dots + F_n \cdot x_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}; \quad y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + \dots + F_n \cdot y_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}.$$

§ 13. Моменты инерции, моменты сопротивления и радиусы инерции плоских сечений

Осевым моментом инерции плоского сечения относительно данной оси называется взятая по всей площади сечения сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до этой оси:

$$I_x = \int_F y^2 \cdot dF \quad (\text{см}^4), \quad (13.1)$$

$$I_y = \int_F x^2 \cdot dF \quad (\text{см}^4). \quad (13.2)$$

Осевые моменты инерции всегда положительны и не могут быть равны нулю.

Центробежным моментом инерции плоского сечения называется взятая по всей площади сечения сумма произведений площадей элементарных площадок на их расстояния до двух взаимно перпендикулярных осей:

$$I_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF \quad (\text{см}^4). \quad (13.3)$$

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

Осевые и центробежные моменты инерции плоского сечения относительно осей, параллельных центральным осям, определяют по формулам:

$$I_x = I_{x_c} + a^2 \cdot F, \quad (13.4)$$

$$I_y = I_{y_c} + b^2 \cdot F, \quad (13.5)$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + a \cdot b \cdot F, \quad (13.6)$$

где I_{x_c} и I_{y_c} - осевые моменты инерции относительно центральных осей;

$I_{x_c y_c}$ - центробежный момент инерции относительно центральных осей;

a, b - расстояния между выбранными осями и параллельными им центральными осями.

При повороте осей на угол α моменты инерции определяют по формулам:

$$I_{x_1} = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha, \quad (13.7)$$

$$I_{y_1} = I_y \cdot \cos^2 \alpha + I_x \cdot \sin^2 \alpha + I_{xy} \cdot \sin 2\alpha, \quad (13.8)$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha. \quad (13.9)$$

Когда значение угла поворота осей достигнет величины, определяемой формулой:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}, \quad (13.10)$$

тогда осевые моменты инерции достигают своего максимума и минимума, а центробежный момент инерции становится равным нулю. Оси, занимающие такое положение, называются главными осями инерции, а соответствующие экстремальные осевые моменты инерции - главными моментами инерции. Главные оси инерции, проходящие через центр тяжести плоского сечения, называются главными центральными осями инерции.

Величину главных моментов инерции определяют по формуле:

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2}. \quad (13.11)$$

Моментом сопротивления сечения называется отношение осевого момента инерции к расстоянию от нейтральной оси до наиболее удаленной точки сечения:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \quad (\text{см}^3), \quad (13.12)$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} \quad (\text{см}^3). \quad (13.13)$$

Радиусом инерции сечения относительно оси называется величина, определяемая по формуле:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}} \text{ (см)}, \quad (13.14)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} \text{ (см)}. \quad (13.15)$$

§ 14. Вывод формул зависимости между моментами инерции при параллельном переносе и повороте осей

Пусть у какого-нибудь сечения площадью F (рис. 16) ось X будет центральной, а ось X_1 - параллельная ей на расстоянии a .

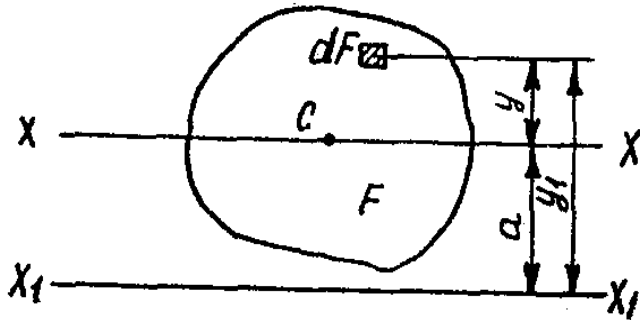


Рис. 16

Выделим в сечении элементарную площадку dF на расстоянии y от оси x , тогда расстояние площадки dF от оси X_1 будет $y_1 = y + a$.

Напишем выражение момента инерции площади сечения относительно оси X_1 :

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 \cdot dF = \int_F (y + a)^2 \cdot dF = \int_F (y^2 + 2 \cdot a \cdot y + a^2) \cdot dF = \int_F y^2 \cdot dF + 2 \cdot a \cdot \int_F y \cdot dF + a^2 \cdot \int_F dF.$$

В полученном выражении первый интеграл представляет собой осевой момент инерции относительно оси X , проходящей через центр тяжести, т.е. $\int_F y^2 \cdot dF = I_x$,

второй интеграл выражает собой статический момент всей площади сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, и, следовательно, равный нулю, т.е. $2 \cdot a \cdot \int_F y \cdot dF = 0$.

Последний интеграл $\int_F dF$ выражает собой площадь всего сечения F . Таким образом, момент инерции сечения относительно оси X_1 :

$$I_{x_1} = I_x + a^2 \cdot F. \quad (14.1)$$

Полученная формула читается так: момент инерции площади сечения относительно любой оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной и проходящей через центр тяжести сечения, плюс произведение площади сечения на квадрат расстояния между осями. При помощи этой формулы можно вычислить моменты инерции любого сложного сечения.

Аналогично записываются формулы перехода для осевого I_{y_1} и центробежного $I_{x_1 y_1}$ моментов инерции:

$$I_{y_1} = I_y + b^2 \cdot F, \quad (14.2)$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + a \cdot b \cdot F. \quad (14.3)$$

В формулах (14.1) и (14.3) величина a - расстояние от центральной оси инерции X до оси X_1 , а величина b - расстояние от центральной оси инерции y до оси y_1 .

Для определения момента инерции сложного сечения его разбивают на элементарные сечения (прямоугольники, треугольники и т.д.), затем вычисляют моменты инерции элементарных сечений относительно центральной оси сложного сечения и суммируют их.

Приведем без доказательства формулы перехода для моментов инерции при повороте осей на некоторый угол α . Предположим, что какое-нибудь сечение имеет моменты инерции I_x, I_y, I_{xy} относительно осей координат X, Y (рис.17). Требуется определить моменты инерции того же сечения относительно осей X_1, Y_1 , повернутых на некоторый угол α (рис.17).

Моменты инерции сечения относительно нового положения осей определяются по формулам:

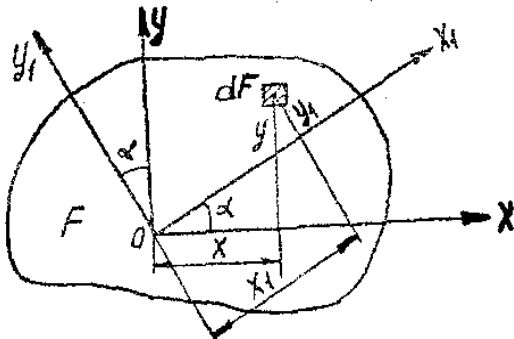


Рис. 17.

$$I_{x_1} = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha, \quad (14.4)$$

$$I_{y_1} = I_y \cdot \cos^2 \alpha + I_x \cdot \sin^2 \alpha + I_{xy} \cdot \sin 2\alpha, \quad (14.5)$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha \quad (14.6)$$

§ 15. Главные оси инерции и главные центральные моменты инерции (вывод формул)

Величины моментов инерции I_{x_1}, I_{y_1} и $I_{x_1 y_1}$ относительно повернутых осей зависят от угла α .

Практически очень важно знать такое положение осей X_1, Y_1 , при котором осевые моменты инерции I_{x_1}, I_{y_1} будут иметь экстремальное значение, т.е. один из них будет иметь наибольшее, а другой - наименьшее значение.

Если у сечения ось симметрии принята за ось X или ось Y , то центробежный момент инерции равен нулю, так как в этом случае каждому элементу dF с положительным Y соответствует равный и симметрично расположенный элемент dF' с отрицательным Y . Элементарные произведения $x \cdot y \cdot dF$ взаимно уничтожаются и интеграл $\int_F x \cdot y \cdot dF$ обращается в нуль.

Покажем, что для любой точки произвольного плоского сечения можно найти такие две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции будет равен нулю. Пусть для произвольного сечения координатные оси X и Y повернуты против движения часовой стрелки вокруг начала координат

нат на 90° и заняли положение X' и Y' (рис. 18).

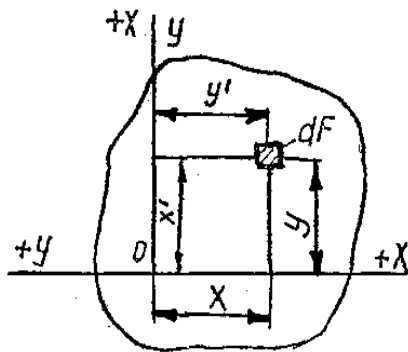


Рис. 18

Если теперь выразить новые координаты через старые, получим: $x' = +y$; $y' = -x$

Тогда центробежный момент инерции относительно новых осей:

$$I_{x'y'} = \int_F x' \cdot y' \cdot dF = - \int_F x \cdot y \cdot dF = -I_{xy}$$

т.е. получается, что при повороте координатных осей на 90° , центробежный момент инерции меняет знак. Поэтому всегда будет и такое положение осей, относительно которых величина центробежного момента инерции равна нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции плоского сечения равен нулю, называют главными осями инерции. Если начало координат совпадает с центром тяжести сечения, то соответствующие главные оси называются главными центральными осями инерции, а моменты инерции относительно главных осей называются главными центральными моментами инерции.

Главные моменты инерции имеют предельные (экстремальные) значения: один из них I_{\max} , а другой - I_{\min} .

Оси симметрии любого сечения являются главными осями инерции. У таких сечений, как тавр, швеллер и т.д., ось симметрии является главной осью инерции. Другой главной центральной осью инерции будет перпендикулярная к ней ось, проходящая через центр тяжести сечения.

Чтобы определить положение главных осей сечения, не имеющего осей симметрии, необходимо найти величину угла, на который нужно повернуть первоначальные оси. Выведем формулу для определения этого угла. Положим, что нам известны моменты инерции I_x , I_y , I_{xy} какого-либо сечения относительно произвольных осей X и Y . Центробежный момент инерции сечения относительно других координатных осей X_1 и Y_1 с тем же началом координат, но повернутых относительно осей X и Y на угол α , получим по формуле (14.6):

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha$$

Для определения угла, на который нужно повернуть первоначальные оси, чтобы сделать их главными, необходимо приравнять к нулю центробежный момент инерции $I_{x_1 y_1}$:

$$\frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha = 0$$

откуда
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} = - \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (15.1)$$

Подставив в полученную формулу (15.1) значения I_x , I_y , I_{xy} , найдем для угла 2α два значения, отличающихся на 180° ; сами же углы будут отличаться друг от друга на 90° . Поэтому главные оси будут перпендикулярны друг к другу.

Если при известных I_x , I_y , I_{xy} величины $\sin^2 \alpha$, $\cos^2 \alpha$, $\sin 2\alpha$ в формулах (14.4) и (14.5) выразить через $\operatorname{tg} 2\alpha$, определяемый по формуле (15.1), то получим следующую формулу для определения главных моментов инерции:

$$I_{\max \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}, \quad (15.2)$$

или
$$I_{\max \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2}. \quad (15.3)$$

§ 16. Определение моментов инерции простейших сечений

Осевой момент инерции прямоугольника

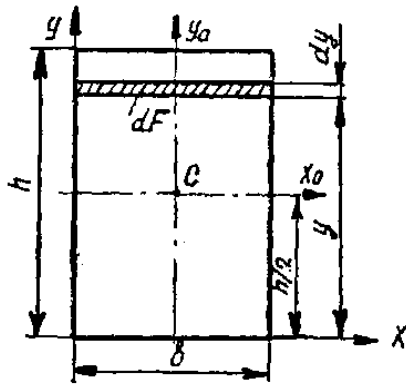


Рис. 19

Разбив прямоугольник с основанием b и высотой h (рис. 19) на бесконечно узкие горизонтальные полосы, возьмем одну из них на расстоянии y от оси x . Ширина этой полосы b , высота dy . Момент инерции ее относительно оси X будет равен произведению площади полосы $b \cdot dy$ на квадрат расстояния y :

$$dI_x = b \cdot dy \cdot y^2$$

Момент инерции прямоугольника относительно основания выразится суммой моментов инерции всех бесконечно узких полос. Применяя формулу (13.1), получим:

$$I_x = \int_F y^2 \cdot dF = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{b \cdot h^3}{3} \quad (16.1)$$

Используя формулу (14.1), найдем момент инерции относительно центральной оси X_0 :

$$I_{x_0} = I_x - a^2 \cdot F = \frac{b \cdot h^3}{3} - \frac{b \cdot h^3}{4} = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad (16.2)$$

где $a = \frac{h}{2}$.

Очевидно, что момент инерции прямоугольника относительно оси Y_0 :

$$I_{y_0} = \frac{b^3 \cdot h}{12} \quad (16.3)$$

Приняв $b = h = a$, получим формулу для определения момента инерции квадратного сечения со стороной a .

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \frac{a^4}{12} \quad (16.4)$$

Момент инерции круга

Сначала определим полярный момент инерции круга. Для этого берем круг радиуса r (рис.20) и разбиваем его на бесконечно малые концентрические кольца шириной $d\rho$. Взяв одно из колец радиусом ρ ,

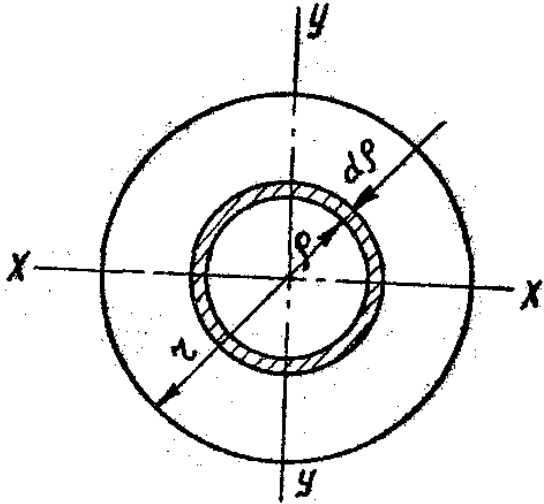


Рис.20

определим его полярный момент инерции:

$$dI_p = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho \cdot \rho^2 = 2 \cdot \pi \cdot \rho^3 \cdot d\rho.$$

Для определения полярного момента инерции площади круга необходимо просуммировать моменты инерции всех элементарных колец, начиная с кольца, у которого $\rho=0$, и кончая кольцом с $\rho=r$, т.е.

$$I_p = \int_0^r 2 \cdot \pi \cdot \rho^3 \cdot d\rho = 2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^r = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot r^4}{2},$$

$$\text{или окончательно } I_p = \frac{\pi \cdot r^4}{2} \quad (16.5)$$

Выражая полярный момент инерции площади круга через диаметр, получим:

$$I_p = \frac{\pi \cdot \left(\frac{d}{2} \right)^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \quad (16.6)$$

$$\text{или окончательно } I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 0,1 \cdot d^4 \text{ (см}^4\text{)} \quad (16.7)$$

Ввиду симметрии круга относительно любого диаметра, осевые моменты инерции относительно любых осей, проходящих через центр круга, равны между собой, поэтому $I_x = I_y = I$, а так как $I_p = I_x + I_y$, то величина осевого (экваториального) момента инерции площади круга относительно любой оси, проходящей через центр круга, равна половине полярного момента инерции, т.е.

$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 0,05 \cdot d^4 \text{ (см}^4\text{)}. \quad (16.8)$$

Осевой момент инерции кругового кольца

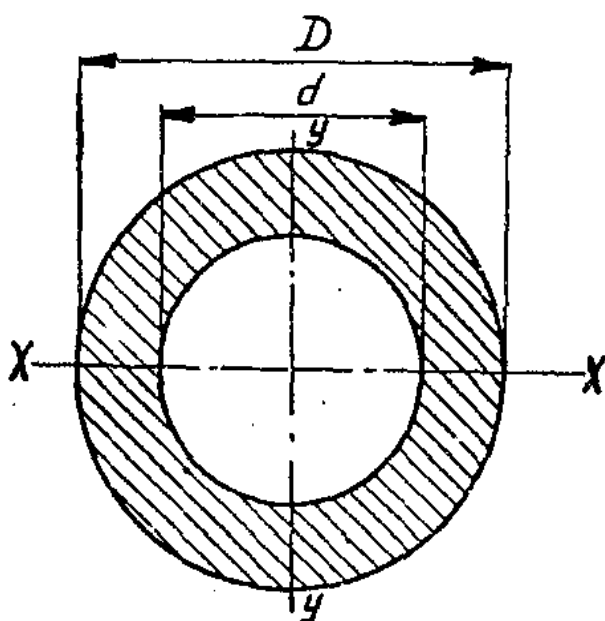


Рис.20

Осевой момент инерции кругового кольца определяется как разность осевых моментов инерции большого круга диаметром D и малого круга диаметром d (рис. 21):

$$I_x = I_y \cong 0,05 \cdot (D^4 - d^4). \quad (16.9)$$

Осевой момент инерции треугольника

Разбиваем площадь треугольника на бесконечно узкие полоски шириной dy и выделим одну из них, находящуюся на расстоянии y от оси X_1 (рис. 22).

Из подобия треугольников ABC и abc определяем расстояние x :

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{h}; \quad x = \frac{b \cdot y}{h}.$$

Площадь элементарной полоски: $dF = x \cdot dy = \frac{b \cdot y}{h} \cdot dy$.

Осевой момент инерции площади треугольника относительно оси X_1 :

$$I_{x_1} = \int_F y^2 \cdot dF = \int_0^h \frac{b \cdot y}{h} y^2 \cdot dy = \frac{b}{h} \cdot \int_0^h y^3 \cdot dy = \frac{b}{h} \cdot \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{b}{h} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{b \cdot h^3}{4}$$

Окончательно: $I_{x_1} = \frac{b \cdot h^3}{4} \quad (16.10)$

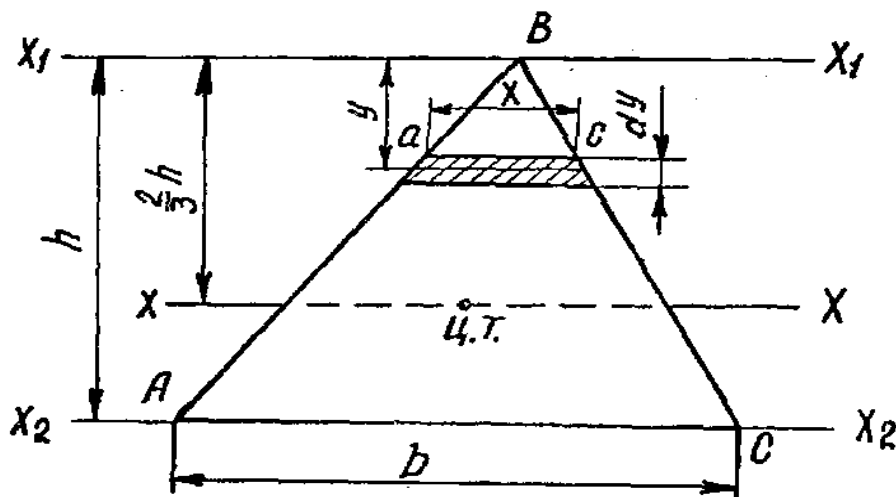


Рис.22

Также путем интегрирования находят моменты инерции треугольника относительно оси X_2 , совпадающей с основанием, и относительно центральной оси X по формуле (14.1):

$$I_{x_2} = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad (16.11)$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}. \quad (16.12)$$

ИЗГИБ

§ 17. Основные понятия и определения

Деформация изгиба характеризуется тем, что в поперечных сечениях балки возникают изгибающие моменты и часто, одновременно с последними, - поперечные силы.

Изгиб называют чистым, если в сечениях балки возникают только изгибающие моменты. Если же наряду с изгибающими моментами в сечениях балки возникают и поперечные силы, изгиб называют поперечным.

Деформация изгиба имеет место в результате действия внешних сил, приложенных перпендикулярно к оси балки, а также от пар сил, плоскость действия которых проходит через ее ось.

Плоскости, в которых лежат главные центральные оси инерции поперечных сечений, называют главными плоскостями балки.

Если плоскость действия сил (силовая плоскость) проходит через одну из главных плоскостей балки и ось ее деформируется (искривляется) в этой же плоскости, изгиб называют плоским или прямым.

Если же силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных плоскостей балки, изгиб называют косым.

Линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения балки называется силовой линией (рис. 23).

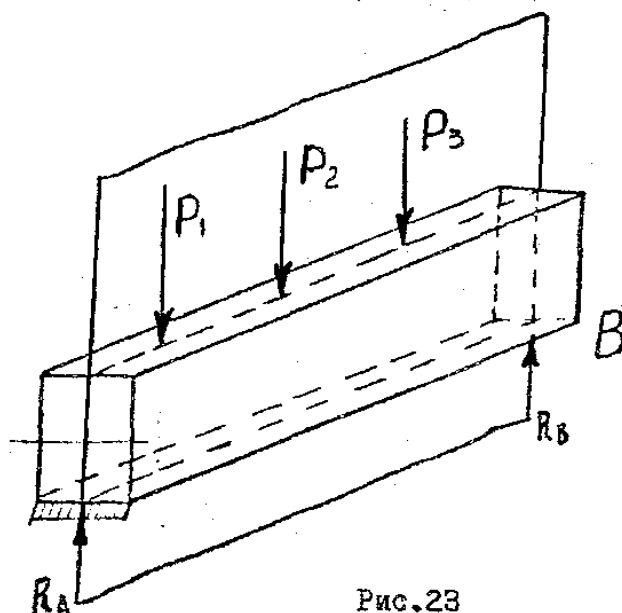


Рис. 23

Внешние силы, приложенные к балке, обычно представляют собой результат воздействия отдельных частей конструкции, опирающихся на нее. Их можно свести к сосредоточенным силам, равномерно или неравномерно распределенным по длине балки нагрузкам и к парам сил.

Распределенные нагрузки могут действовать на балку равномерно или неравномерно по всей ее длине. Измеряют их величиной нагрузки, приходящейся на единицу длины балки и выражающейся в т/м, кг/см. Эту величину погонной нагрузки на балку обозначают q и назы-

вают интенсивностью распределенной нагрузки (рис. 24а).

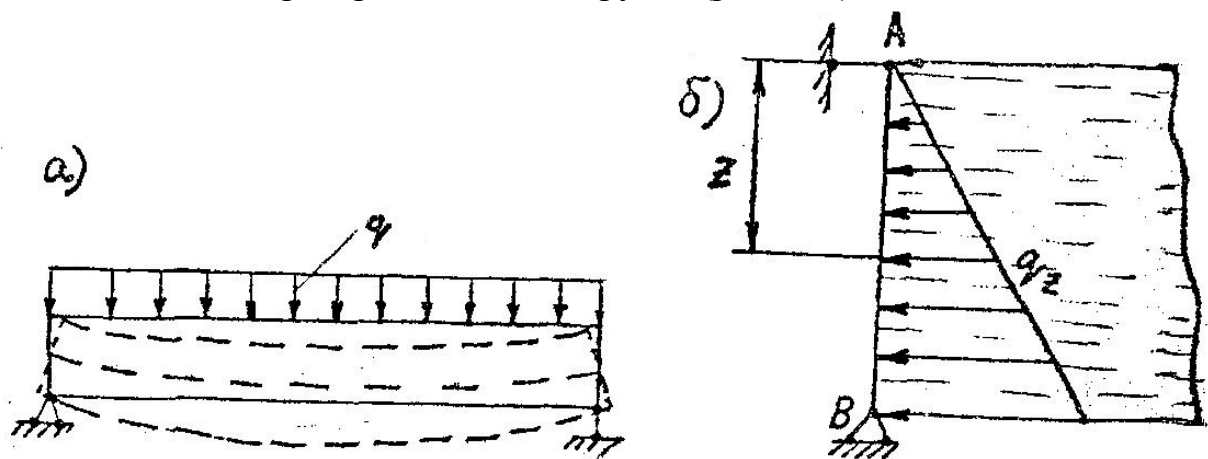


Рис. 24

При неравномерно распределенной нагрузке интенсивность ее меняется по длине балки. В этом случае ее обозначают q_z - интенсивность распределенной нагрузки для сечения балки на расстоянии от опоры. Например, давление воды на стойку плотины в сечении на длине от опоры А (рис. 24б) или давление земли на подпорную стенку.

При изучении изгиба будем рассматривать лишь такие балки, сечения которых имеют одну или две оси симметрии, а действующие внешние силы лежат в одной из плоскостей симметрии.

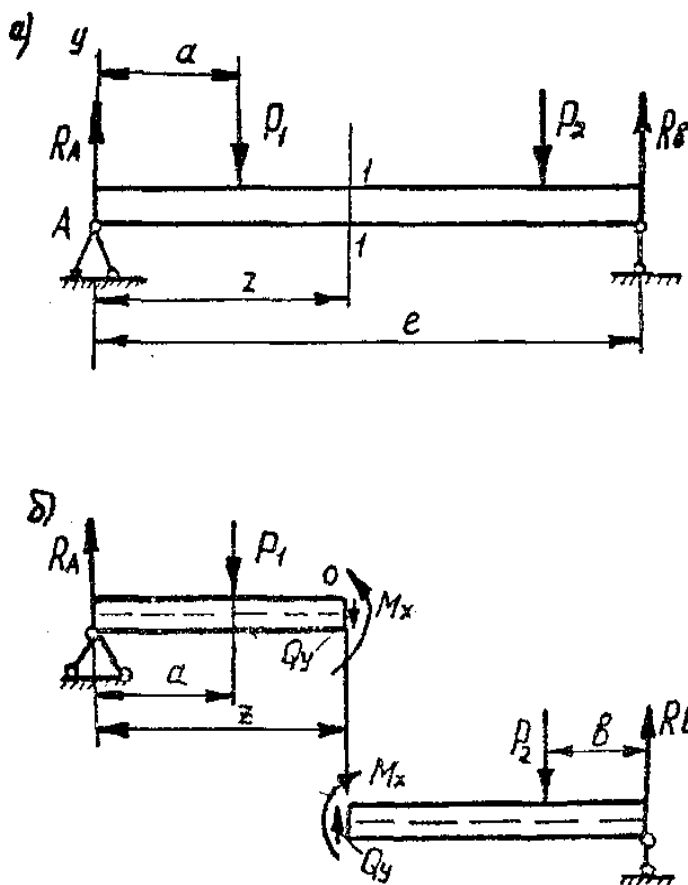


Рис. 25

При определении опорных реакций балки будем пользоваться уравнениями статики, выражающими условия равновесия всех внешних сил, приложенных к ней (в том числе и реакций). Таких уравнений для сил, лежащих в плоскости, можно написать три. Следовательно, в случае наличия трех неизвестных реакций их можно определить при помощи уравнений статики. Поэтому балки, в опорах которых возникает не больше трех реакций, называются статически определимыми. Балки, для определения опорных реакций которых уравнений статики недостаточно, называются статически неопределимыми.

§ 18. Поперечная сила Q и изгибающий момент M. Правила знаков Q и M.

Пусть балка АВ, свободно лежащая

на двух опорах, находится под действием двух сил P_1 и P_2 , расположенных в плоскости ее симметрии (рис. 25а). Отбросив опоры и заменив их опорными реакциями R_A и R_B , будем рассматривать балку как находящуюся под действием внешних сил P_1 , P_2 , R_A и R_B . Эти силы вызывают в сечениях балки внутренние силы упругости, которые определим при помощи метода сечений.

Сечением I-I на расстоянии z от левой опоры рассечем балку на две части и, отбросив правую часть, рассмотрим условия равновесия оставшейся части (рис. 25б). Очевидно, что оставшаяся часть балки будет находиться в равновесии под действием внешних сил R_A , P_1 и внутренних сил по сечению I-I, эквивалентных действию отброшенной части балки на оставшуюся. По условию равновесия внутренние силы в рассматриваемом сечении обеих частей балки будут численно равны, но противоположны по направлению.

Заменим действие отброшенной правой части на оставшуюся внутренними силами, равнодействующая которых должна быть расположена в плоскости действия внешних сил R_A и P_1 . Обозначив проекцию этой равнодействующей на ось y через Q_y , а ее момент относительно центра рассматриваемого сечения 0-Z через M_x , составим уравнения равновесия $\sum Y = 0$ и $\sum M = 0$ (так как силы R_A и P_1 перпендикулярны к оси Z , уравнение равновесия $\sum Z = 0$ обращается в тождество вида $0=0$).

$$\sum Y = R_A - P_1 - Q_y = 0; \quad \sum M = R_A \cdot z - P_1 \cdot (z - a) - M_x = 0,$$

$$\text{откуда } Q_y = R_A - P_1; \quad M_x = R_A \cdot z - P_1 \cdot (z - a).$$

Таким образом, внутренние силы в рассматриваемом сечении оказались приведенными к силе Q_y и паре сил с моментом M_x .

Проекция равнодействующей внутренних сил в сечении на ось, перпендикулярную к оси балки, называется поперечной силой в рассматриваемом сечении и обозначается Q_y или Q .

Момент равнодействующей внутренних сил относительно центра тяжести рассматриваемого сечения называется изгибающим моментом и обозначается M_x или M .

Из равновесия правой части балки (рис. 25б) можно заключить, что поперечная сила Q_y изгибающий момент M_x в сечении будут иметь те же значения, что и для левой части, но направления их будут противоположны.

Поперечная сила в рассматриваемом сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, действующих по одну сторону сечения на ось, перпендикулярную к оси балки.

Изгибающий момент в рассматриваемом сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону сечения, относительно его центра тяжести.

Чтобы получить в одном и том же сечении балки один и тот же знак для поперечной силы или изгибающего момента независимо от того, какая часть балки (левая или правая) рассматривается при вычислениях, приняты следующие правила знаков:

1) поперечная сила в любом сечении считается положительной, если равнодействующая левых внешних сил направлена снизу вверх, а правых - сверху вниз (рис. 26а). В противном случае, поперечная сила будет отрицательной (рис. 26б);

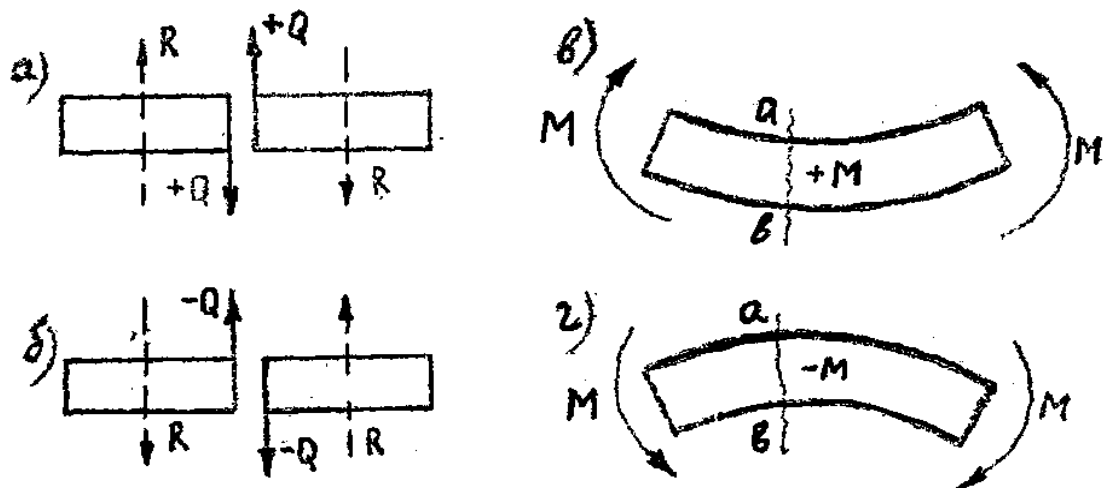


Рис.26

2) изгибающий момент в любом сечении балки, например, в сечении а-в (рис.26в) считается положительным, если результирующий момент от действия всех, левых внешних сил направлен по часовой стрелке, а от правых внешних сил - против часовой стрелки; в противном случае (рис. 26г), изгибающий момент считается отрицательным.

На основании рис. 26 можно получить наиболее простое правило знаков для изгибающих моментов, связанное с характером деформации балки, а именно: изгибающий момент положителен, если балка изгибается выпуклостью вниз; если же балка изгибается выпуклостью вверх, изгибающий момент отрицателен.

§ 19. Зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки (теорема Д. И. Журавского)

Если изгибаемая балка находится в равновесии, то и любой элемент, мысленно вырезанный из нее, должен также находиться в равновесии.

Предположим, что из балки АВ, находящейся под действием произвольной нагрузки, вырезан элемент бесконечно малой длины dz (рис. 27а). Нагрузку на этот элемент, вследствие бесконечно малой его длины, можно считать равномерно распределенной интенсивностью q (рис. 27б).

Действие левой части балки на элемент заменим поперечной силой Q и изгибающим моментом M . Так как на этот элемент действует только равномерно распределенная нагрузка, то на участке dz поперечная сила Q и изгибающий момент M являются непрерывными функциями от z . Следовательно, в сечении на расстоянии $(z+dz)$ поперечная сила и изгибающий момент получают бесконечно малые приращения и будут соответственно равны: $(Q+dQ)$, $(M+dM)$. Составим уравнение равновесия сил, действующих на элемент:

$$\sum Y = Q + q \cdot dz - (Q + dQ) = 0$$

откуда получим:

$$\frac{dQ}{dz} = q, \quad (19.1)$$

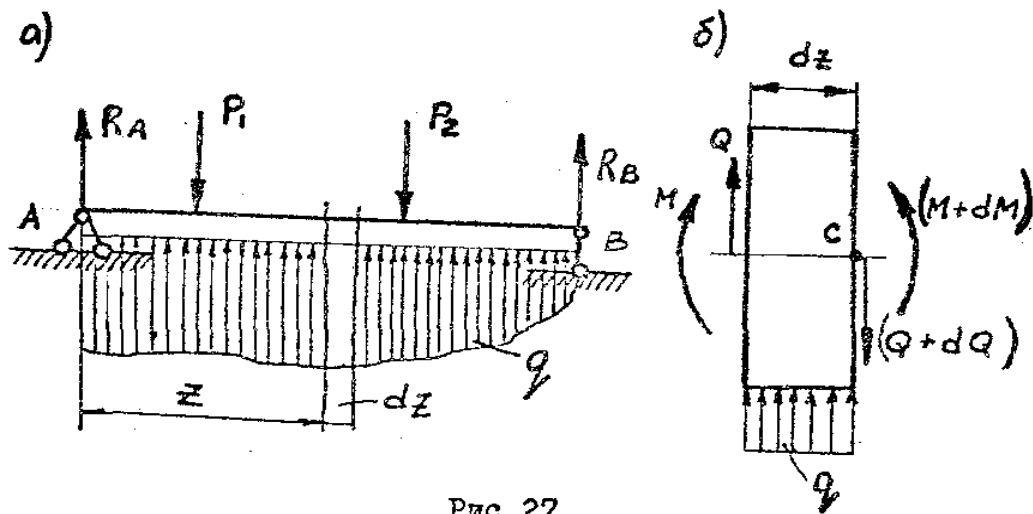


Рис. 27

т.е. производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности сплошной нагрузки в том же сечении.

Теперь составим уравнение моментов всех сил относительно центра тяжести правого сечения элемента (точки С):

$$\sum M_C = M + Q \cdot dz + q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} - (M + dM) = 0$$

или $Q \cdot dz + q \cdot \frac{dz^2}{2} = dM$,

откуда, пренебрегая малой величиной второго порядка, получим:

$$\frac{dM}{dz} = Q, \quad (19.2)$$

т.е. производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе в том же сечении.

Из предыдущих формул получаем зависимость:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q \quad (19.3)$$

Полученные дифференциальные зависимости между изгибающим моментом M , поперечной силой Q и интенсивностью нагрузки q , называются теоремой Д. И. Журавского.

§ 20. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Графики, выражающие закон изменения поперечных сил или изгибающих моментов по длине балки, называются эпюрами Q или M .

Построение эпюр производится следующим образом: линию, параллельную оси балки, принимают за ось абсцисс, от которой в произвольном масштабе от-

кладевают ординаты, соответствующие значениям Q или M , действующим в различных сечениях балки. Соединяя концы отложенных ординат, получаем эпюру Q или M .

Ординаты, выражающие величины положительных поперечных сил, принято откладывать вверх от оси, а отрицательных - вниз. Ординаты, выражающие положительные изгибающие моменты, откладывают вверх, т.е. в сторону сжатого волокна балки.

Штриховать эпюры Q и M следует только вертикальными линиями, поскольку каждая линия штриховки в принятом масштабе выражает величину Q или M в данном сечении.

Построим эпюры Q и M для балки пролетом l , нагруженной сосредоточенной силой P (рис. 28).

Определим величины опорных реакций R_A и R_B :

$$\sum M_A = P \cdot a - R_B \cdot l = 0; \quad R_B = \frac{P \cdot a}{l};$$

$$\sum M_B = R_A \cdot l - P \cdot b = 0; \quad R_A = \frac{P \cdot b}{l}.$$

Построение эпюры.

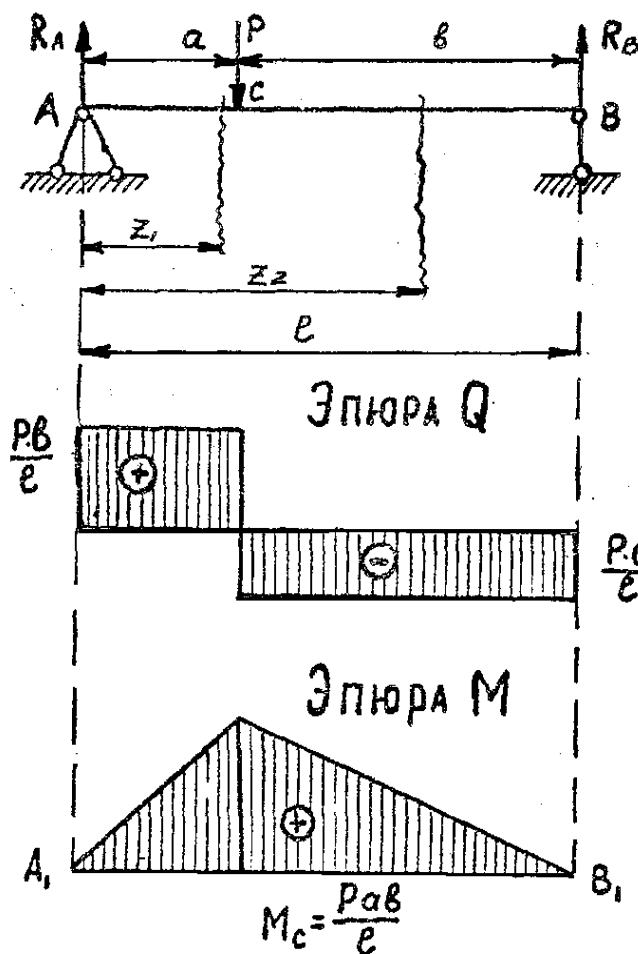


Рис. 28

Возьмем сечение балки на расстоянии z от левой опоры и определим в нем поперечную силу Q и изгибающий момент M . Слева от сечения действует только одна сила - опорная реакция R_A . Следовательно, по определению поперечной силы проекция на вертикальную ось опорной реакции будет выражать поперечную силу Q в сечении, т.е.

$$Q_{z_1} = R_A = \frac{P \cdot b}{l}.$$

Опорная реакция R_A направлена вверх, следовательно, поперечная сила будет положительна, поэтому отложим ординату, выражающую ее величину в произвольном масштабе, вверх. Урав-

нение $Q_{z_1} = \frac{P \cdot b}{l}$ представляет собой уравнение прямой, параллельной оси абсцисс, следовательно, эпюра Q на первом участке будет иметь вид прямоугольника.

Для построения эпюры Q на втором участке балки возьмем произвольное сечение на расстоянии z_2 от левой опоры.

Слева от этого сечения действуют две силы: опорная реакция R_A и сила P ; справа - одна опорная реакция R_B . Для определения поперечной силы в сечении z_2 можно воспользоваться силами, расположенными слева или справа от сечения. Покажем, что величина Q в обоих случаях будет одна и та же.

Поперечная сила в сечении Q от левых сил: $Q_{z_2} = R_A - P = R_B$, от правых сил: $-Q_{z_2} = -R_B$.

Эпюра поперечных сил в точке C имеет скачок, причем абсолютная величина скачка равна величине приложенной в этом сечении сосредоточенной силы P .

Построение эпюры M .

Составим выражение изгибающего момента в сечении z_1 , который равен алгебраической сумме моментов всех левых или правых сил относительно этого сечения. По левую сторону z_1 , действует только опорная реакция R_A , которая стремится вращать левую часть балки по движению часовой стрелки или изогнуть ее выпуклостью вниз (сжатые волокна сверху), следовательно, изгибающий момент M будет положительным:

$$M_z = R_A \cdot z_1 = \frac{P \cdot b}{l} \cdot z_1$$

Полученное выражение представляет собой уравнение прямой линии, следовательно, изгибающий момент изменяется по закону прямой.

Величину z_1 можно брать в пределах от $z_1 = 0$ до $z_1 = a$:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_A = 0;$$

$$\text{при } z_1 = a \quad M_C = R_A \cdot a = \frac{P \cdot b \cdot a}{l}.$$

Откладывая полученное значение M в принятом масштабе вверх и соединяя конец ординаты прямой с точкой A_1 , получим левую часть эпюры M .

Для построения правой части эпюры изгибающих моментов можно рассматривать левую или правую отсеченные части балки. В данном случае выражение изгибающего момента в сечении z_2 проще составить от правых сил, т.е. от одной опорной реакции R_B :

$$M_{z_2} = R_B \cdot (l - z_2)$$

$$\text{при } z_2 = a \quad M_C = R_B \cdot (l - a) = \frac{P \cdot a \cdot b}{l};$$

$$\text{при } z_2 = l \quad M_B = R_B \cdot (l - l) = 0$$

Соединив прямой линией конец ординаты с точкой B_1 , где $M_B = 0$, получим правую часть эпюры M для балки. Как видно из эпюры M , по всей длине балки изгибающий момент положителен и достигает наибольшего значения в точке C , т.е. под грузом P .

$$M_{\max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}$$

В частном случае, когда сосредоточенный груз расположен в середине пролета балки, т.е. когда $a = b = \frac{l}{2}$, наибольшее значение изгибающего момента в сечении:

$$M_{\max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l} = \frac{P \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}}{l} = \frac{P \cdot l}{4}$$

§ 21. Нормальные напряжения при изгибе

Слой волокон $m-n$, расположенный в середине высоты балки (рис. 29а) не меняет своей длины (не растягивается и не сжимается), а только искривляется. Такой слой называется нейтральным слоем.

Волокна, лежащие дальше от нейтрального слоя, удлиняются или укорачиваются больше, чем волокна, расположенные ближе к нему. А из этого, согласно закону Гука, следует, что величина напряжений по высоте поперечного сечения изменяется пропорционально удлинению волокон, т.е. напряжения нарастают с удалением от нейтрального слоя.

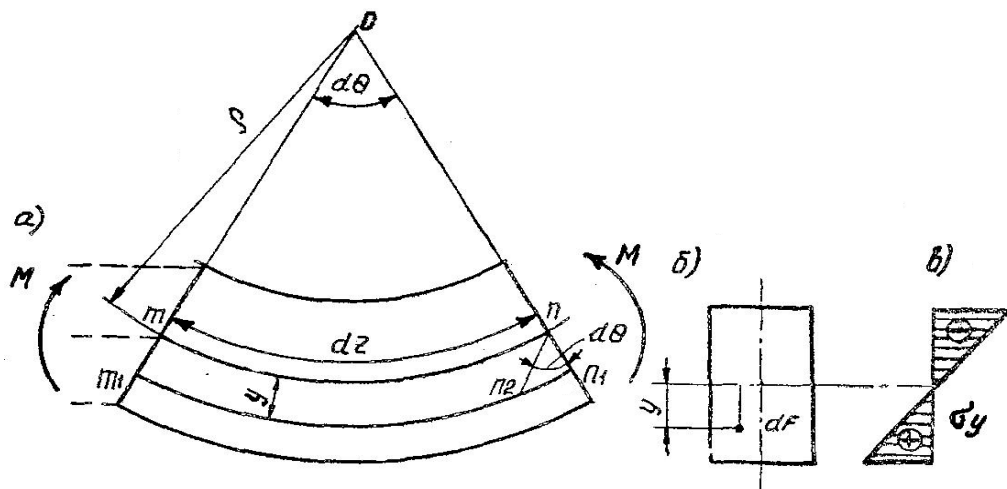


Рис. 29

Следует заметить, что в данном случае нейтральный слой находится посередине высоты сечения потому, что балка имеет две оси симметрии. При другой форме поперечного сечения нейтральный слой может лежать ниже или выше середины сечения.

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения балки называется нейтральной линией или осью. Она, как и нейтральный слой, проходит через центр тяжести сечения и перпендикулярна к плоскости симметрии балки, т.е. к плоскости действия сил.

Перейдем теперь к определению нормальных напряжений в поперечных сечениях балки при чистом изгибе.

Пусть к балке АВ приложены две равные сосредоточенные силы Р на одинаковом расстоянии от опор (рис. 30). Как видно из эпюры Q , средний участок балки CD испытывает деформацию чистого изгиба, так как поперечная сила во всех поперечных сечениях балки на этом участке равна нулю.

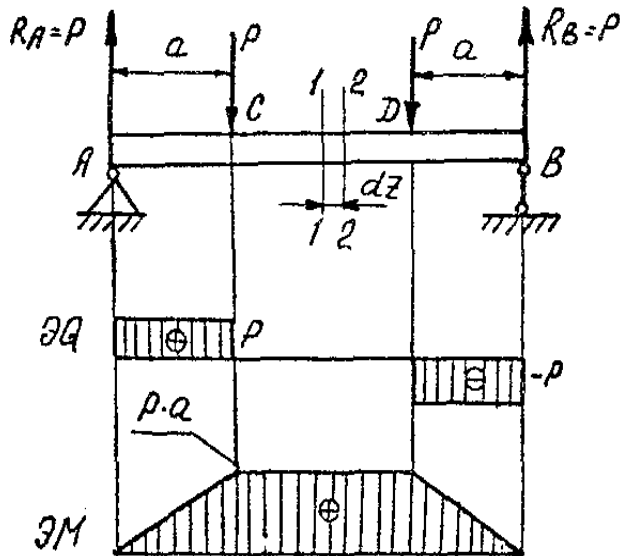


Рис. 30

Двумя поперечными сечениями 1-1 и 2-2 вырежем из балки этого участка элемент длиной dz и представим его в более крупном масштабе (рис. 29а). После изгиба торцы балки несколько наклонятся, образуя угол $d\theta$. Обозначим радиус кривизны изогнутой оси балки ρ , а длину одного из продольных волокон, лежащих в нейтральном слое, mn ; так как эти волокна не изменяют своей длины при изгибе, можно написать:

$$mn = dz = \rho \cdot d\theta$$

Любое другое волокно выше или ниже нейтрального слоя изменит свою длину. Рассмотрим волокно m_1n_1 , лежащее в растянутой зоне на расстоянии y от нейтрального слоя, и следовательно, удлиняющееся при изгибе.

Для определения величины удлинения его проведем через точку n линию, параллельную mm_1 , до пересечения с волокном m_1n_1 в точке n_2 . Тогда можно считать $m_1n_2 = mn$, а отрезок n_1n_2 будем принимать как абсолютное удлинение волокна m_1n_2 или, что то же самое, волокна mn . Отрезок n_1n_2 можно принять за дугу круга радиуса y , тогда абсолютное удлинение $n_1n_2 = y \cdot d\theta$, а относительное удлинение того же волокна m_1n_2 будет:

$$\varepsilon = \frac{n_1n_2}{mn} = \frac{y \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta}$$

или, сокращая на $d\theta$: $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$, т.е. относительное удлинение волокна прямо

пропорционально расстоянию от него до нейтральной линии (оси) балки.

Так как волокна балки при чистом изгибе испытывают только растяжение или сжатие, поэтому для определения нормального напряжения в рассматриваемом волокне можно воспользоваться законом Гука: $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Подставив сюда выражение $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$ относительного удлинения произвольного волокна балки, получим величину напряжения в нем:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{y}{\rho} \quad (21.1)$$

т.е. нормальные напряжения изменяются прямо пропорционально расстоянию от нейтральной оси балки, а в точках, находящихся на самой нейтральной оси, они равны нулю.

Теперь получим закон распределения нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки при чистом изгибе в зависимости от величины изгибающего момента.

Для этого выделим на поперечном сечении (рис. 29б) произвольную элементарную площадку dF на расстоянии y от нейтральной оси. Величина элементарной силы, которая возникает на площадке:

$$\sigma \cdot dF = E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot dF.$$

Теперь рассмотрим равновесие левой отсеченной части балки, заменив отброшенную часть силами, для чего напомним уравнения равновесия:

$$\sum Z = 0; \sum M = 0$$

Уравнение равновесия $\sum Y = 0$ обращается в тождество вида $0=0$. Сумма проекций всех элементарных сил на ось Z будет выражена интегралом, распространенным на всю площадь сечения, т.е.

$$\sum Z = \int_F \sigma \cdot dF = \frac{E}{\rho} \cdot \int_F y \cdot dF = 0$$

Величина модуля упругости E не равна нулю, а радиус кривизны ρ - величина конечная, т.е. $E \neq 0$; $\rho \neq 0$, следовательно:

$$\int_F y \cdot dF = S_x = 0.$$

Полученный интеграл представляет собой статический момент площади сечения относительно нейтральной оси. Отсюда следует, что нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения, потому что только в этом случае статический момент равен нулю.

Элементарная нормальная сила равна $\sigma \cdot dF$, ее момент относительно нейтральной оси $dM = \sigma \cdot dF \cdot y$. Чтобы определить полный момент, необходимо суммировать элементарные моменты, распространив сумму на всю площадь поперечного сечения балки, т.е.

$$M_x = \int_F \sigma \cdot dF \cdot y,$$

или, заменив σ равным ему выражением $\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho}$, получим:

$$M_x = \frac{E}{\rho} \cdot \int_F y^2 \cdot dF.$$

В полученном выражении интеграл является моментом инерции сечения относительно нейтральной оси, т.е. $\int_F y^2 \cdot dF = I_x$.

Следовательно, можно написать: $\frac{E \cdot I_x}{\rho} = M$, или $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}$ (21.2)

где ρ - кривизна изогнутой оси балки; произведение $E \cdot I_x$ называется жесткостью сечения балки или жесткостью сечения при изгибе. Оно характеризует степень сопротивляемости балки искривлению оси при изгибе.

Полученное равенство (21.2) читается так: кривизна изогнутой оси балки прямо пропорциональна изгибающему моменту и обратно пропорциональна жесткости сечения балки.

Подставив это выражение (21.2) в формулу (21.1) получим:

$$\sigma = \frac{M_x \cdot E}{E \cdot I_x} \cdot y = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$

окончательно
$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$
 (21.3)

Полученная формула справедлива для любой формы поперечного сечения, но при условии, если сечение имеет ось симметрии, в плоскости которой действуют изгибающие балку пары сил.

Формула (21.3) является уравнением прямой, следовательно, нормальные напряжения по высоте сечения изменяются по закону прямой. Наибольшие напряжения будут в наиболее удаленных от нейтральной оси волокнах.

Величина $\frac{I_x}{y_{\max}} = W_x$ называется моментом сопротивления сечения и является геометрической характеристикой прочности поперечного сечения балки.

Подставив в последнее выражение вместо $\frac{I_x}{y_{\max}}$ величину момента сопротивления W_x получим окончательную формулу для σ_{\max} :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \quad (21.4)$$

Момент сопротивления измеряют в м^3 , см^3 .

Формула (21.6) выведена для случая чистого изгиба, при котором поперечные сечения балки остаются плоскими и после деформации. В случае поперечного изгиба сечения испытывают сдвиг, обусловленный наличием в них поперечной силы, и искривляются. Значит, в этом случае допущения, положенные в основу вывода формулы (21.3), окажутся несправедливыми. Однако, искривление сечений и надавливание волокон друг на друга настолько незначительны, что они не меняют существенно установленного выше закона распределения деформаций волокон.

Поэтому формула (21.4) может быть применима и для случая плоского поперечного изгиба балки.

Выведем формулы моментов сопротивления для элементарных плоских сечений.

Прямоугольник со сторонами b и h (см. рис. 31а)

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^2}{6} \quad (21.5)$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{\frac{b^3 \cdot h}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{b^2 \cdot h}{6} \quad (21.6)$$

Квадрат со стороной a (см. рис. 31б):

$$W_x = W_y = \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{6} \quad (21.7)$$

Круг (см. рис. 31в):

$$W_x = W_y = \frac{I}{d/2} = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3 \quad (21.8)$$

Круговое кольцо (см. рис. 31г):

$$W_x = W_y = \frac{I}{D/2} = \frac{\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32 \cdot D} \approx 0,1 \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} \quad (21.9)$$

Если зададимся отношением диаметров $\frac{d}{D} = C$ или $d = C \cdot D$, то получим:

$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot (1 - C^4)$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - C^4) \approx 0,1 \cdot D^3 \cdot (1 - C^4) \quad (21.10)$$

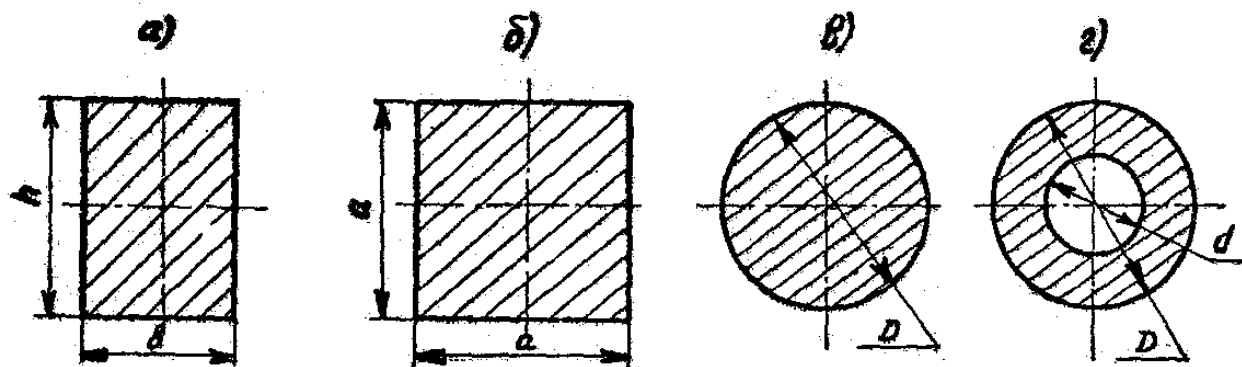


Рис. 31

§ 22. Касательные напряжения при изгибе

Касательные напряжения, при изгибе определяются по формуле:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x}{I_x \cdot b}, \quad (22.1)$$

где: τ - касательное напряжение на площадке, параллельной, нейтральному слою и в поперечном сечении;

Q - поперечная сила в рассматриваемом сечении балки;

I_x - момент инерции относительно нейтральной оси всего поперечного сечения балки;

S_x - статический момент относительно нейтральной оси той части поперечного сечения, которая лежит вне или ниже рассматриваемой площадки;

b - ширина сечения на уровне площадки, по которой определяются касательные напряжения.

Формула (22.1) называется формулой Д. И. Журавского для определения касательных напряжений при изгибе.

§ 23. Определение касательных напряжений в балках прямоугольного сечения

Подставляя в формулу (22.1) значения S_x для различных значений y , можно установить закон изменения величины касательных напряжений по высоте прямоугольного сечения (рис. 32).

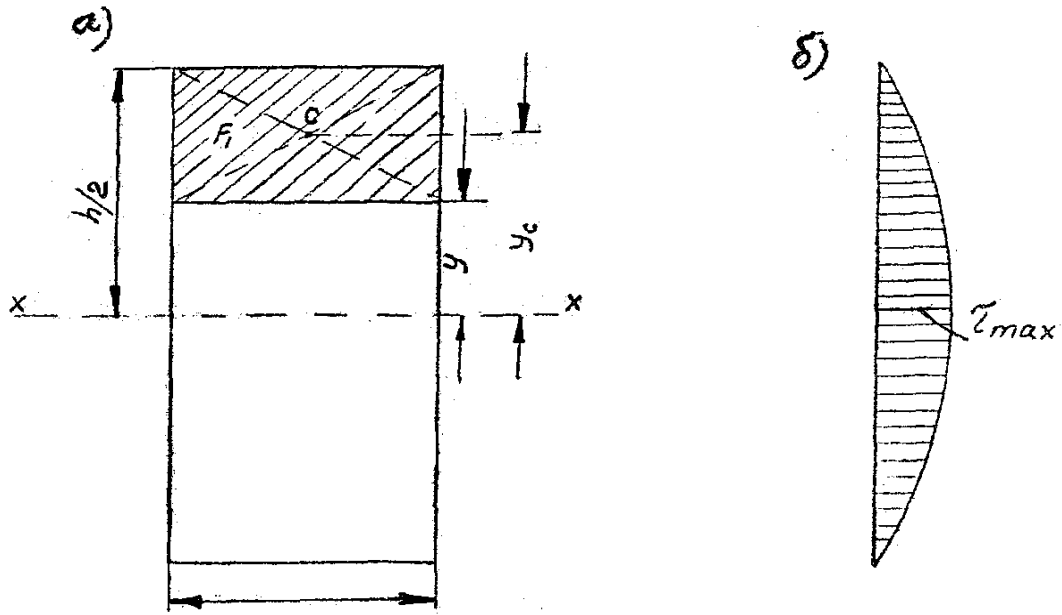


Рис. 32

Для этого выделим на расстоянии y от нейтральной оси часть прямоугольного сечения высотой $(\frac{h}{2} - y)$, площадь которого: $F = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right)$,

а расстояние от центра тяжести этой площади до оси X:

$$y_c = \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right).$$

Статический момент этой части сечения относительно нейтральной оси:

$$S_x = F \cdot y_c = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Подставив значение S_x в формулу (22.1), получим:

$$\tau = \frac{Q}{I_x \cdot b} \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Это - уравнение квадратичной параболы, из которого следует, что касательное напряжение τ имеет наибольшее значение в точках на нейтральной оси (при $y = 0$):

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{I_x \cdot l} \cdot \frac{b \cdot h^2}{8}.$$

Подставив вместо I_x выражение момента инерции для прямоугольного сечения

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}, \text{ получим:}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{\frac{b \cdot h^3}{12} \cdot l} \cdot \frac{b \cdot h^2}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F},$$

где $F = b \cdot h$ или окончательно:
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F} \quad (23.1)$$

В крайних же верхних и нижних точках сечения, т.е. при $y = \pm \frac{h}{2}$, величина касательных напряжений равна нулю.

Эпюра касательных напряжений по высоте сечения показана на рис. 32б.

§ 24. Потенциальная энергия деформации при изгибе

Работа внешнего момента (пары сил), как известно из теоретической механики, равна произведению момента на соответствующий угол поворота. В данном же случае пара сил приложена статически, т.е. возрастает от нуля до конечного своего значения, следовательно, работу внешнего момента определяем как половину произведения величины момента на угол поворота сечения:

$$du = \frac{1}{2} \cdot M \cdot d\theta$$

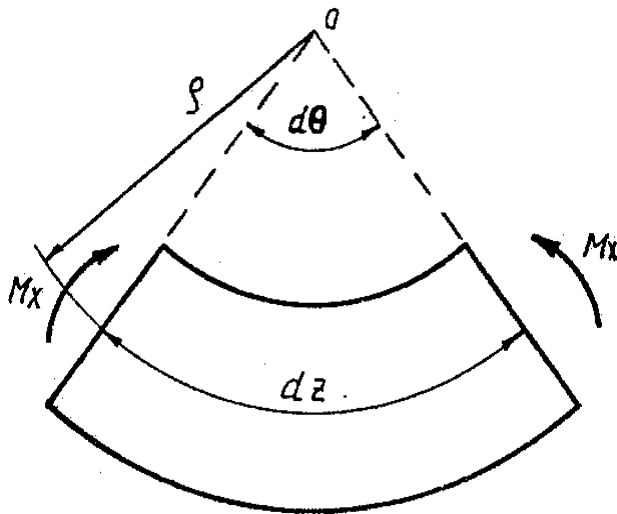


Рис. 33

Но из рис. 33 видно, что $d\theta = \frac{dz}{\rho}$, а

так как согласно формуле $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}$,

то, следовательно: $d\theta = \frac{M_x \cdot dz}{E \cdot I_x}$ и

$$du = \frac{M_x^2}{2 \cdot E \cdot I_x} \cdot dz$$

Так как при чистом изгибе изгибающий момент - величина постоянная, то полная работа внутренних сил численно равна потенциальной энергии на участке длиной l :

$$u = \frac{M_x^2}{2 \cdot E \cdot I_x} \cdot l \quad (24.1)$$

При поперечном изгибе, как известно, в сечениях балки возникают еще поперечные силы, однако, ими можно пренебречь, так как они почти не влияют на работу, произведенную изгибающим моментом.

§ 25. Линейные и угловые перемещения при изгибе

Мы знаем, что при изгибе ось балки искривляется и, следовательно, точки, лежащие на ней, получают некоторые перемещения, которые, однако, настолько малы по сравнению с длиной балки, что направления их можно считать перпендикулярными первоначальному положению оси балки. Эти перемещения называются прогибами.

Кривая, в которую обращается первоначальная ось балки под действием внешних сил, называется изогнутой осью балки или упругой линией (рис. 34).

Прогибы в разных сечениях различны и зависят от расстояния z от принятого начала координат, например, совпадающего с точкой А, т.е. $y_z = f(z)$. При $z=0$, $y=0$, а при $z = \frac{l}{2}$ он достигает наибольшего своего значения, т.е. $y_{\max} = f$, где f – наибольший прогиб или стрела прогиба.

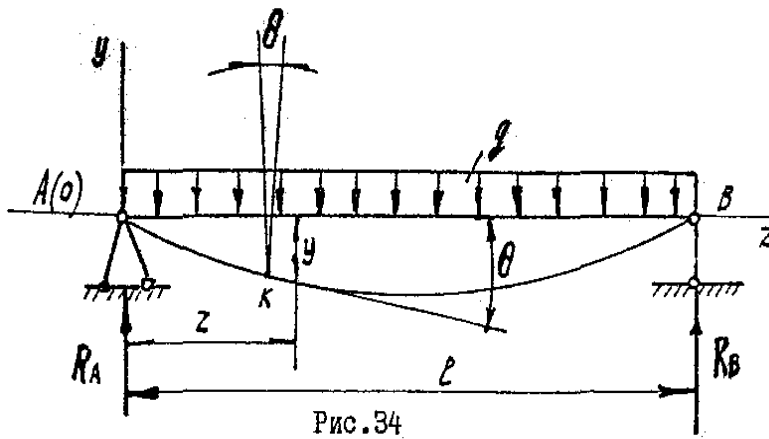


Рис. 34

Оси координат условимся располагать следующим образом.

Начало координат примем на левом конце балки, ось z – направим вправо по оси балки, а ось y – вверх. Такое расположение осей координат даст возможность считать прогибы балки вниз отрицательными, а прогибы вверх – положительными.

Угол, составленный касательной к любой точке К изогнутой оси с первоначальным ее положением, условимся обозначить θ . На основании гипотезы плоских сечений, пренебрегая искривлением сечения балки при поперечном изгибе, будем считать, что поперечное сечение балки, проведенное через произвольную точку "К" первоначальной оси, поворачивается при изгибе балки на тот же угол θ . Следовательно, угол θ выражает угловое перемещение поперечного сечения балки при изгибе и называется углом поворота сечения балки. Он равен первой производной по z от прогиба в этом сечении, т.е.

$$\theta = y' = \frac{dy}{dz}$$

Для определения вида изогнутой оси балки необходимо составить ее уравнение, т.е. выразить ординаты (прогибы балки) в функции от положения точек по длине балки, другими словами, найти зависимость $y = f(z)$. Чтобы найти эту зависимость, используем равенство (21.2), полученное при выводе формулы нормаль-

ных напряжений при изгибе: $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}$ и выражающее связь кривизны балки с изгибающим моментом и поперечной жесткостью сечения.

Формула кривизны, получаемая из дифференциальной геометрии, выражает ее связь с производными y' и y'' от ординат кривой.

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (25.1)$$

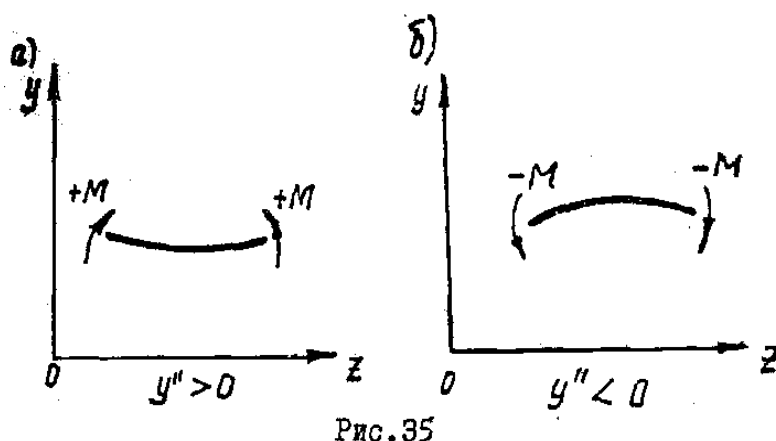
Зависимость эту можно упростить, имея в виду, что прогибы балок очень малы по сравнению с длиной балки, а углы поворота также не составляют величины, большей 1° . В знаменатель же правой части этой формулы входит $(y')^2$ - тангенс угла наклона в квадрате, являющийся малой величиной по сравнению с 1, входящей в двучлен знаменателя, а поэтому ее отбрасывают, в результате чего формула принимает вид:

$$\frac{1}{\rho} \cong \pm y'' \cong \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (25.2)$$

т.е. кривизна балки приближенно равна второй производной от прогиба. Теперь формулу $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}$ можно представить так:

$$\pm y'' = \frac{M_x}{E \cdot I_x}, \quad \text{или} \quad E \cdot I_x \cdot y'' = M_x. \quad (25.2)$$

Напомним из математики, что знак второй производной зависит от направления осей координат, а именно: она будет иметь положительное значение, если вогнутость кривой направлена в сторону положительной оси, и, наоборот, будет отрицательной, если в сторону положительной оси направлена выпуклость кривой (рис. 35).



Изгибающий момент, как мы условились, в первом случае будет положителен, во втором - отрицателен. Таким образом, при направлении оси y вверх в уравнении $\pm y'' = \frac{M_x}{E \cdot I_x}$

$$\pm y'' = \frac{M_x}{E \cdot I_x}$$

нужно оставить знак "плюс", а при направлении оси вниз - знак "минус".

В дальнейшем будем направлять ось y всегда вверх, тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$y'' = \frac{M_x}{E \cdot I_x} \quad (25.4)$$

Полученное уравнение (25.4) называется дифференциальным уравнением изогнутой оси балки.

Существует несколько методов решения этого уравнения.

Аналитический метод решения состоит в двукратном интегрировании дифференциального уравнения (25.4), в результате чего первое интегрирование дает уравнение углов поворота:

$$E \cdot I_x \cdot y' = \int M_x \cdot dz + C,$$

а второе интегрирование - уравнение прогибов:

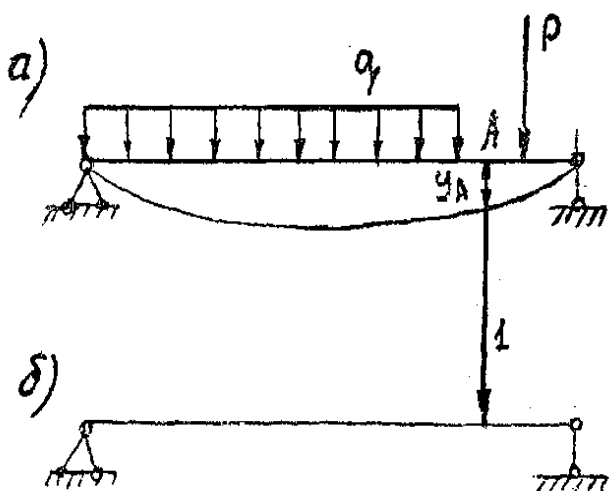
$$E \cdot I_x \cdot y = \int dz \int M_x \cdot dz + C \cdot z + D.$$

После каждого интегрирования получают постоянную интегрирования. Таким образом, для любого участка балки в результате двукратного интегрирования уравнения изогнутой оси получают две постоянные интегрирования. Следовательно, при наличии нескольких участков аналитический метод приводит к решению системы уравнений с большим числом неизвестных постоянных интегрирования. Постоянные интегрирования определяют из условий закрепления балки (граничных условий), а также из условий на границах смежных участков. При этом: а) каждая неподвижная или подвижная опора дает одно условие - равенство нулю прогиба в сечении балки на опоре; б) от каждой жесткой заделки (защемления) можно получить два условия - равенство нулю прогиба и угла поворота в сечении заделки; в) от каждой границы двух смежных участков получаем два условия - равенство между собой прогибов и углов поворота общих сечений на границе обоих участков.

§ 26. Интеграл Мора и способ Верещагина

Пусть требуется определить вертикальное перемещение точки "А" балки (рис. 36а). Обозначив действительное состояние балки Р, а фиктивное состояние ее - i , приложим к ней единственную внешнюю силу, равную, единице, по направлению искомого перемещения (рис. 36б).

Работа внешних сил равна произведению единичной силы на искомое перемещение: $A_{ip} = i \cdot y_A$



Работа внутренних сил:

$$U_{pi} = U_{ip} = \int_0^l \frac{M_p \cdot M_i}{E \cdot I_x} \cdot dz$$

Но если деформации тела совершенно упругие, то работа внешних сил численно равна работе внутренних сил, т.е.

$$A_{ip} = U_{ip}.$$

Следовательно:

Рис. 36

$$y_A = \int_0^l \frac{M_p \cdot M_i}{E \cdot I_x} \cdot dz \quad (26.1)$$

Формула (26.1) называется формулой (интегралом) Мора и позволяет определить перемещение любой линейно деформируемой системы (или балки) от любой нагрузки. Подинтегральное выражение в этой формуле следует считать положительным, если оба изгибающих момента входят в формулу с одинаковыми знаками или, что то же, эпюры их расположены по одну сторону оси балки.

Вычисление перемещений по формуле Мора весьма упрощается, если одна из эпюр прямолинейна, а жесткость балки постоянна. Тогда при определении перемещения интеграл Мора вычисляют графоаналитически по способу А.Н.Верещагина.

Основное преимущество этого способа состоит в том, что при его помощи можно обойтись без составления уравнения моментов и без интегрирования их произведений. Эти трудоемкие операции заменяются простейшими геометрическими вычислениями, заключающимися в "перемножении эпюр" изгибающих моментов от действительной и фиктивной (единичной) нагрузок.

Предположим, что на участке АВ балки постоянной жесткости (рис. 37) эпюра М прямолинейна и выражена уравнением $M_i = k \cdot z + b$, вторая же эпюра с произвольным очертанием $M_p(z)$.

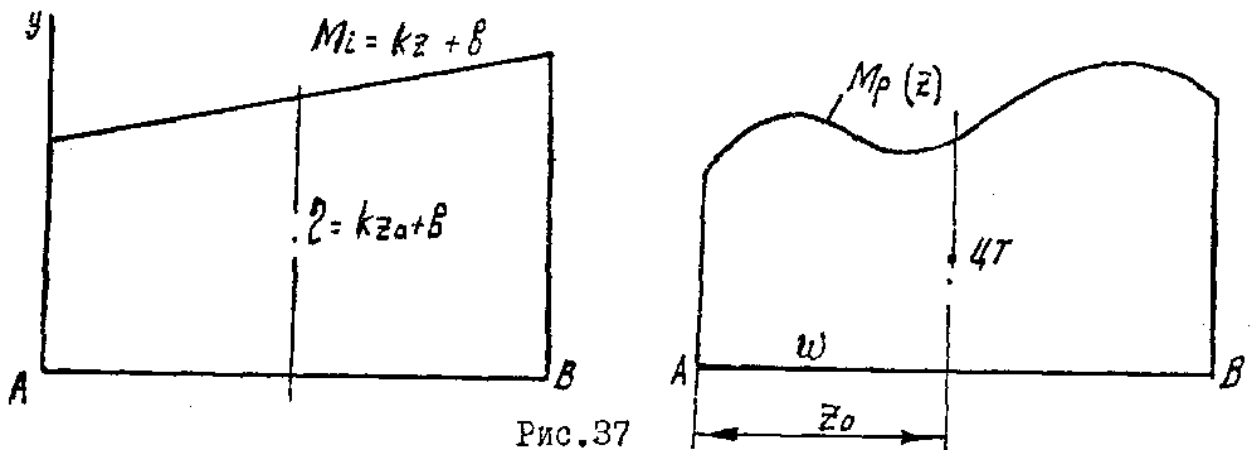


Рис. 37

Подставив выражение М в интеграл Мора, получим:

$$\int_A^B \frac{M_p \cdot M_i}{E \cdot I_x} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \int_A^B M_p \cdot (k \cdot z + b) \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left(k \cdot \int_A^B M_p \cdot z \cdot dz + b \cdot \int_A^B M_p \cdot dz \right)$$

Очевидно, что первый интеграл представляет собой статический момент площади ω относительно оси ординат, равный $\omega \cdot z_0$, а второй интеграл - площадь эпюры M_p в пределах от А до В, следовательно:

$$\int_A^B \frac{M_p \cdot M_i}{E \cdot I_x} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \int_A^B M_p \cdot (k \cdot \omega \cdot z + b \cdot \omega) = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \omega \cdot (k \cdot z_0 + b).$$

Но множитель $k \cdot z_0 + b = \eta$ - ордината прямолинейной эпюры M_i , находящаяся против центра тяжести площади. Поэтому окончательно имеем:

$$\int_A^B \frac{M_p \cdot M_i}{E \cdot I_x} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \omega \cdot \eta, \quad (26.2)$$

т.е. перемещение любой точки прямого бруса равно произведению площади эпюры M_p (произвольного очертания) на расположенную против ее центра тяжести ординату прямолинейной эпюры M_i , деленному на жесткость сечения балки.

Следует иметь в виду, что ордината η берется только из прямолинейной эпюры.

Пример: определить вертикальное перемещение (прогиб) и угол поворота концевого сечения консольной балки постоянной жесткости (рис. 38а).

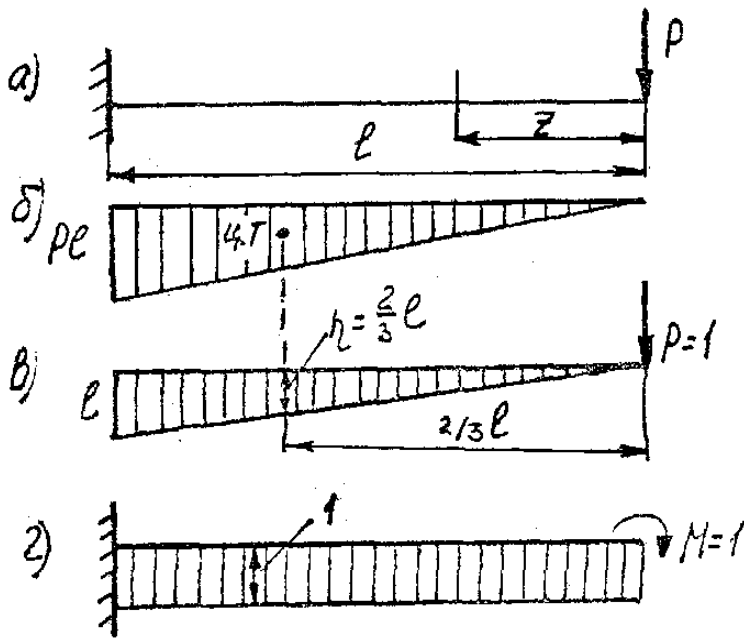


Рис. 38

Решение: строим эпюру изгибающих моментов для действительного состояния балки (рис. 38б). Выбираем фиктивное состояние балки с единичной силой в точке приложения нагрузки и строим от нее эпюру изгибающих моментов (рис. 38в). Определяем вертикальное перемещение по правилу Верещагина. Поскольку обе эпюры прямолинейны и их границы совпадают, площадь эпюры и ординату можно брать из любой эпюры.

Площадь грузовой эпюры:

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot p \cdot l^2$$

Центр тяжести этой эпюры находится в расстоянии $\frac{l}{3}$ от заделки.

Ордината эпюры моментов от единичной нагрузки, расположенная под центром тяжести грузовой эпюры равна $\frac{2}{3} \cdot l = \eta$, поэтому:

$$y = \frac{\omega \cdot \eta}{E \cdot I} = - \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} \cdot p \cdot l^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot l = - \frac{p \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

Результат перемещения эпюр положителен, поскольку обе эпюры расположены по одну сторону от оси балки.

Величину угла поворота сечения определим, выбрав фиктивное состояние балки, при котором на ее конце действует сосредоточенная пара сил с моментом, равным единице, и строим для этого случая эпюру изгибающих моментов (рис. 38г).

Перемножая эпюру ω на эпюру от единичного момента, получим угол поворота концевого сечения консоли:

$$\theta = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} \cdot p \cdot l^2 \cdot 1 = -\frac{p \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

Так же, как и в первом случае, обе эпюры расположены по одну сторону оси балки, следовательно, результат перемножения эпюр положителен, т.е. концевое сечение балки поворачивается по направлению единичного момента.

§ 28. Сложное сопротивление. Косой изгиб

До сих пор были рассмотрены случаи, когда элементы конструкций, подверженные действию внешних сил, испытывали только одну из простых деформаций: осевое растяжение или сжатие, сдвиг, изгиб и кручение. В действительности, во многих случаях элементы конструкций при работе испытывают одновременно не одну из перечисленных деформаций, а две или больше.

Например, валы машин испытывают одновременно деформации кручения и изгиба: колонны и столбы, нагруженные внецентренно, испытывают, кроме сжатия или растяжения, еще изгиб.

Элементы конструкций, испытывающие одновременно по две и более деформаций, находятся в состоянии сложного сопротивления.

Рассмотрим некоторые случаи сложного сопротивления, причем при определении напряжений и деформаций будем пользоваться принципом независимости действия сил. Одним из видов сложного сопротивления является косой изгиб. Случай изгиба, когда силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных плоскостей бруса, называется косым изгибом.

Из определения понятия косоуго изгиба следует, что брус с круглым, квадратным, равносторонним шестиугольным, восьмиугольным и им подобным сечениями, у которых две любые взаимно перпендикулярные центральные оси являются главными, косоуго изгиба испытывать не будут.

На косой изгиб работают балки с несимметричным сечением. Рассмотрим деформацию косоуго изгиба на следующем примере. Пусть на консоль действует сосредоточенная нагрузка P , приложенная на свободном конце под углом α к главной плоскости YOZ (рис. 39а). Требуется определить наибольшие напряжения в поперечных сечениях бруса, его прогибы, а также положение нейтральной оси (нулевой линии) и построить эпюру нормальных напряжений.

Чтобы проверить прочность бруса при косом изгибе, нужно найти в опасном его

сечении точку с наибольшим нормальным напряжением. Действующую под углом силу P разложим на две составляющие P_x и P_y по направлениям главных осей инерции O, X и O, Y .

Величины составляющих равны:

$$P_x = P \cdot \sin \alpha; \quad P_y = P \cdot \cos \alpha$$

Заменив силу P двумя составляющими, мы привели случай косоуго

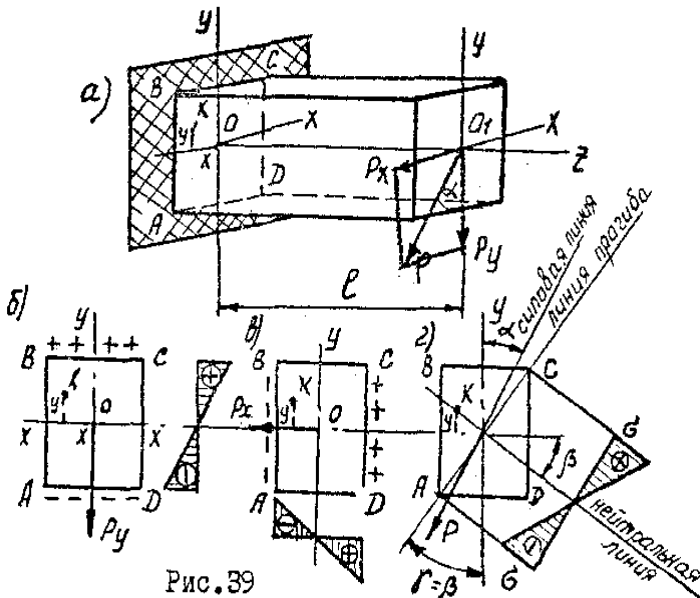


Рис. 39

изгиба к двум прямым изгибам, вызываемым совместно силами P_x и P_y в двух главных плоскостях бруса.

Для определения напряжений в точках поперечных сечений бруса при его косом изгибе необходимо алгебраически суммировать напряжения, возникающие от сил P_x и P_y , т.е. от каждого прямого изгиба в отдельности. Перемещения (прогибы) поперечных сечений определяются геометрическим сложением их перемещений, происходящих в каждой из главных плоскостей.

Рассмотрим поочередно действие составляющих сил.

1. Сила P_y изгибает брус в плоскости главной оси инерции y , нейтральной осью сечения будет ось x (рис. 39б). От действия этой силы в сечениях бруса выше нейтральной оси будут возникать растягивающие напряжения, а ниже - сжимающие. В данном случае изгиб будет плоским и величина нормальных напряжений определяется по формуле:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_x} \cdot y.$$

2. Сила P_x изгибает брус в плоскости другой главной оси инерции x ; нейтральной осью сечения будет ось y (рис. 39в), знаками на сторонах АВ и CD отмечен характер распределения напряжений: слева - сжатие, справа - растяжение. Нормальные напряжения для этого случая:

$$\sigma_y = \frac{M_y}{I_y} \cdot x.$$

В последних двух формулах $M_x = P_y \cdot l = p \cdot l \cdot \cos \alpha$ и $M_y = p \cdot l \cdot \sin \alpha$ представляют собой изгибающие моменты в опасном сечении балки, т.е. в плоскости заделки ABCD.

Для определения полного нормального напряжения σ от действия силы P алгебраически суммируем напряжения σ_x и σ_y :

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x \quad (28.1)$$

где I_x, I_y - моменты инерции сечения относительно главных осей X, Y , множители x и y - координаты точки, для которой определяется напряжение.

Применяя формулу (28.1), следует руководствоваться ранее принятым правилом знаков для напряжения σ в произвольной точке сечения. В точках сечения, лежащих выше оси X , будут действовать растягивающие напряжения от действия M_x ; значит, перед членом, содержащим M_x , надо поставить знак "плюс" (растянутая зона), а для точек сечения, лежащих ниже оси X - знак "минус" (сжатая зона). Для точек сечения, лежащих справа от оси Y , перед членом, содержащим M_y , следует поставить знак "плюс" (растянутая зона), а для точек, лежащих слева от нее - знак "минус" (сжатая зона).

Нейтральная ось или нулевая линия, т.е. линия, на которой нормальные напряжения равны нулю, не будет совпадать ни с одной из осей X, Y . Она не будет и перпендикулярной к плоскости действия нагрузки.

Определим положение нулевой линии, для чего выразим составляющие моменты M_x и M_y через результирующий момент M , действующий в силовой плоскости:

$$M_x = M \cdot \cos \alpha; \quad M_y = M \cdot \sin \alpha.$$

Подставив значения M_x и M_y в формулу (28.1), получим:

$$\sigma = M \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} \cdot y + \frac{\sin \alpha}{I_y} \cdot x \right).$$

Для составления уравнения нулевой линии необходимо приравнять это выражение нулю; причем слагаемые в скобках следует взять с обратными знаками, поскольку во 2 и 4-м квадрантах, где должна пройти нейтральная ось, координаты X и Y имеют разные знаки (см. рис. 39г, точку К); следовательно, будем иметь:

$$M \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} \cdot y - \frac{\sin \alpha}{I_y} \cdot x \right) = 0$$

Но так как изгибающий момент $M = P$ не может быть равным нулю, то остается принять равным нулю выражение в скобках, т.е.

$$\frac{\cos \alpha}{I_x} \cdot y - \frac{\sin \alpha}{I_y} \cdot x = 0$$

$$\text{или } \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{I_x}{I_y}$$

Обозначив через β угол наклона нулевой линии к оси X , получим:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \beta,$$

после чего выражение для тангенса угла наклона нулевой линии к оси X примет вид:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{I_x}{I_y} \quad (28.2)$$

Как видно из формулы (28.2), углы α и β в общем случае не равны между собой, т.е. нулевая линия не перпендикулярна силовой линии, как это имело место в случае плоскою изгиба. Взаимная перпендикулярность их будет только в тех случаях, когда $I_x = I_y$, т.е. для квадратных, круглых и других сечений, удовлетворяющих условию равенства главных центральных моментов инерции сечения.

В результате вывода формулы (28.2) оказалось, что правая часть положительна, а это значит, что принятый нами отсчет угла по движению часовой стрелки оказался правильным, т.е. совпадает с направлением отсчета угла β , сделанного также по направлению движения часовой стрелки.

Теперь, пользуясь принципом независимости действия сил, определим перемещения при косом изгибе. Прогибы свободного конца балки от действия сил P_x и P_y могут быть определены любым из изложенных выше способов. Они получаются равными:

$$f_x = \frac{P_x \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_y}; \quad f_y = \frac{P_y \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_x},$$

причем, прогиб от действия силы P_x направлен по оси X , а прогиб от действия силы P_y - по оси Y . Полный прогиб конца балки выразится геометрической суммой обоих прогибов:

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}.$$

Направление полного прогиба определяется значением тангенса угла его наклона к оси Y :

$$tg\gamma = \frac{f_x}{f_y} = \frac{P_x \cdot I_x}{P_y \cdot I_y} = \frac{P \cdot I_x \cdot \sin\alpha}{P \cdot I_y \cdot \cos\alpha},$$

или

$$tg\gamma = \frac{I_x}{I_y} \cdot tg\alpha \quad (28.3).$$

Сопоставляя формулы (28.2) и (28.3), находим, что правые их части равны, а значит, равны и их левые части, т.е.

$$tg\gamma = tg\beta \text{ или } \gamma = \beta$$

откуда следует, что полный прогиб направлен перпендикулярно к нулевой линии, т.е. прогиб балки происходит в плоскости, перпендикулярной нулевой линии.

Формулы (28.1), (28.2) и (28.3) были выведены на примере бруса прямоугольного сечения, но они действительны и для других сечений, у которых оси X и Y являются главными осями инерции. Наибольшие напряжения в брусках, сечения которых имеют две оси симметрии и опасная точка максимально удалена от обеих главных осей (например, прямоугольник, двутавр), определяют по формуле:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \quad (28.4)$$

Знаки перед каждым членом правой части формулы берут в зависимости от положения рассматриваемой точки в сечении. В нашем случае, например, для точки "С" (рис. 39г) надо взять плюс, а для точки "А" - минус.

Таким образом, расчетное уравнение на прочность при косом изгибе для балок с сечением указанных типов будет иметь вид:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad (28.5)$$

§ 29. Внецентренное сжатие (растяжение)

Когда сжимающая (растягивающая) сила или равнодействующая нескольких сил действует параллельно оси бруса, но точка приложения ее не совпадает с цен-

тром тяжести поперечного сечения бруса, то такое сжатие или растяжение называется внецентренным.

Рассмотрим сначала случай, когда линия действия сжимающей (растягивающей) силы находится в плоскости, проходящей через главную ось инерции сечения на некотором расстоянии от центра тяжести сечения (рис. 40).

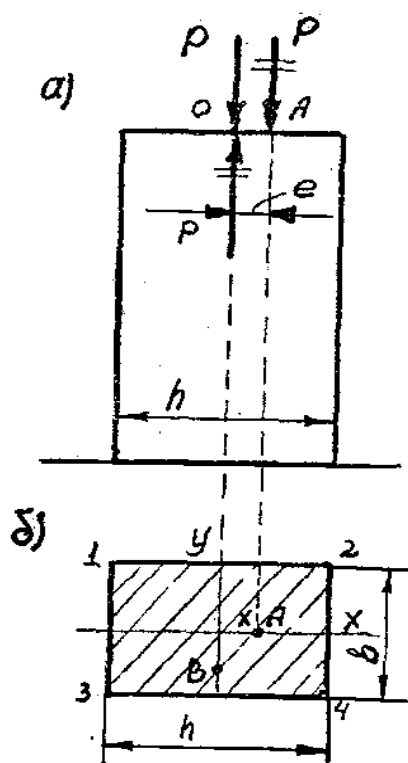


Рис. 40

Расстояние l точки приложения силы до центра тяжести сечения называется эксцентриситетом.

Пусть сила P приложена в точке A . Приведем силу P к центру тяжести сечения, для чего приложим в нем (точка O) две силы, равные по величине силе P , но обратные по направлению. В результате этого теперь на брус будут действовать три силы: сила P , приложенная в центре тяжести сечения, и две силы P , составляющие пару с моментом $M = P \cdot l$ (перечеркнутые двумя черточками). Очевидно, что сила P , приложенная в центре сечения, будет равномерно сжимать брус, а момент пары будет его изгибать. Таким образом, случай внецентренного сжатия бруса мы свели к центральному сжатию и изгибу.

Применяя метод сечений, находим, что в любом поперечном сечении бруса возникает два внутренних силовых фактора:

продольная сила $N = -P$, изгибающий момент $M_y = P \cdot l$

Следовательно, в данном случае имеет место сочетание чистого прямого изгиба с центральным сжатием. Поскольку собственный вес бруса здесь не учитываем, значения внутренних силовых факторов будут одинаковы во всех поперечных сечениях.

Величина нормального напряжения, возникающего в любой точке поперечного сечения бруса, определяется как алгебраическая сумма двух напряжений: σ_N - от центрального сжатия и σ_M от прямого изгиба, т.е.

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M,$$

или на основании формул:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y} \cdot x \quad (29.1)$$

При этом каждое из слагаемых подставляется в эту формулу со своим знаком по характеру деформации бруса, т.е. в данном случае формула будет иметь вид:

$$\sigma = -\frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y} \cdot x \quad (29.2)$$

В случае приложения силы P в точке B :

$$\sigma = -\frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y \quad (29.3)$$

Наибольшее напряжение в сечении:

$$\sigma_{\max \min} = -\frac{N}{F} \pm \frac{M_y}{W_y} \quad (29.4)$$

Для определения максимального значения напряжения (по грани 1-3) перед вторым членом правой части формулы следует поставить знак «плюс», тогда:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} \quad (29.5)$$

а для определения минимального значения напряжения (по грани 2-4) – знак «минус», тогда:

$$\sigma_{\min} = -\frac{N}{F} - \frac{M_y}{W_y} \quad (29.6)$$

Если сила Р будет приложена в точке В (рис. 40б), т.е. по оси Y, то формулы (29.5) и (29.6) примут вид:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{F} + \frac{M_x}{W_x} \quad (\text{по грани 1-2}) \quad (29.7)$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{N}{F} - \frac{M_x}{W_x} \quad (\text{по грани 3-4}) \quad (29.8)$$

Приняв для прямоугольного сечения $F = b \cdot h$; $W = \frac{b \cdot h^2}{6}$ и сделав преобразования, придадим формуле (29.4) другой вид, более удобный для некоторых исследований:

$$\sigma_{\max \min} = -\frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} = -\frac{N}{F} \cdot \left(1 \pm \frac{6 \cdot l}{h} \right),$$

или окончательно:

$$\sigma_{\max \min} = -\frac{N}{F} \cdot \left(1 \pm \frac{6 \cdot l}{h} \right) \quad (29.9)$$

Результат исследования формулы (29.9), с точки зрения влияния величины эксцентриситета на знак и величину напряжения, можно свести к следующим трем положениям (см. рис. 41):

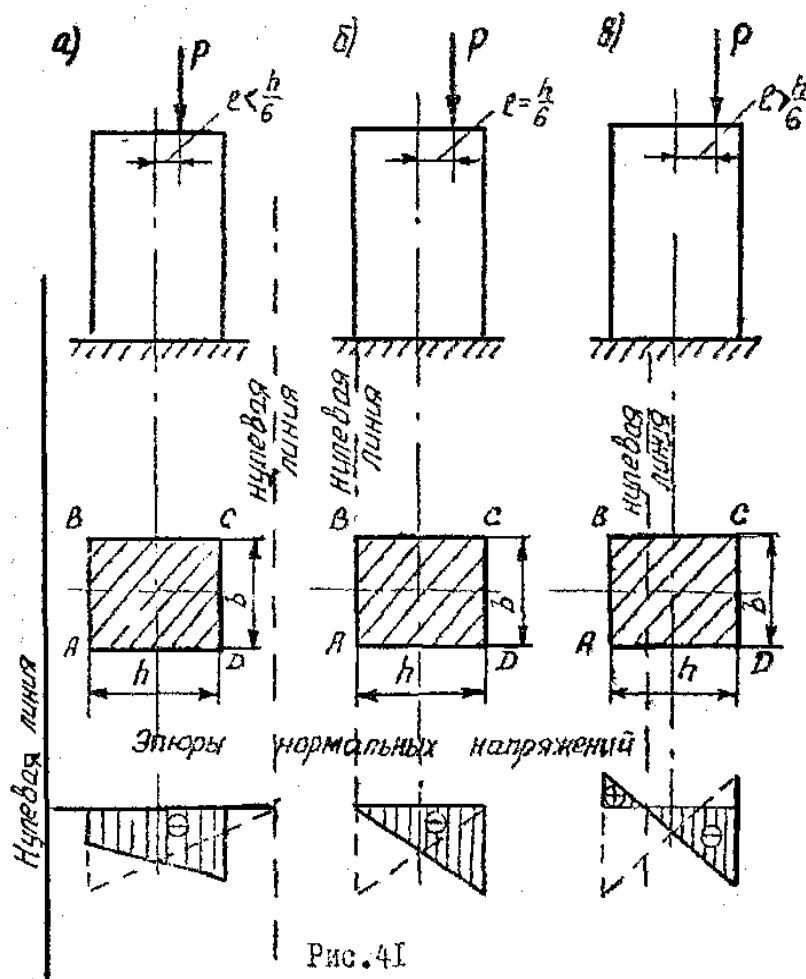


Рис. 41

1) если точка приложения равнодействующей всех сил, приложенных к прямоугольному сечению бруса, не выходит из пределов средней трети сечения, т.е. эксцентриситет не превышает $\frac{h}{6}$, то напряжения в сечении будут одного знака, а нулевая линия проходит за пределами сечения. Область, из которой не выходит равнодействующая, называется ядром сечения;

2) если точка приложения равнодействующей лежит на грани средней трети сечения, то одно из краевых напряжений равно нулю, а другое - в два раза больше напряжения, возникающего при центральном сжатии: нулевая линия при этом проходит по грани

сечения;

3) если точка приложения равнодействующей находится за пределами средней трети, то напряжение в сечении будут разных знаков, а нулевая линия пересекает сечение.

На рис. 41 точка приложения силы P дана справа от оси сечения; соответственно этому построены и эпюры нормальных напряжений; в случае расположения силы P слева от оси сечения соответственно изменится и эпюры нормальных напряжений, а также и положение нулевых линий (см. пункт на рис. 41).

Хрупкие материалы очень плохо сопротивляются растяжению, допускаемые их напряжения на растяжение $[\sigma]_p$ очень малы. Поэтому для них необходимо так подбирать их поперечные размеры, чтобы точка приложения равнодействующей не выходила за пределы средней трети сечения (ядра сечения), т.е. чтобы эпюра напряжений соответствовала эпюре по (рис. 4а) или, в крайнем случае, - эпюре по (рис. 41б).

§ 30. Кручение с изгибом

Рассмотрим случай одновременного кручения и изгиба вала (рис. 42). Применив метод сечений, найдем, что

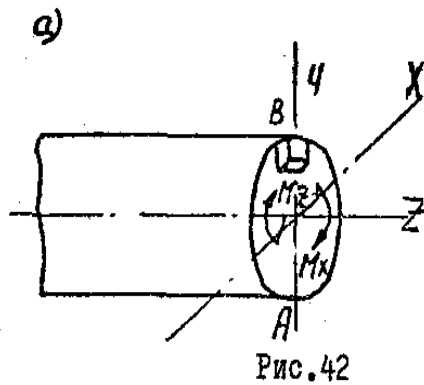
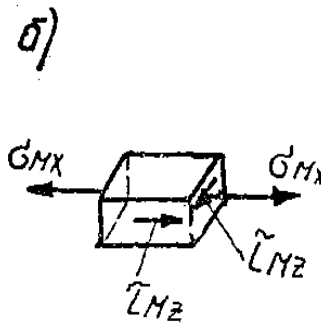


Рис. 42



в поперечных сечениях вала одновременно возникают крутящий M_k и изгибающий M_x моменты. Выделив из бруса около точки "В" элементарный кубик и рассмотрев его равновесие, найдем, что по четырем его граням возникают касательные напряжения, а по

двум из них - еще и нормальные напряжения (рис. 42б). Следовательно, кубик находится в плоском напряженном состоянии.

Таким образом, в каждой точке поперечного сечения бруса одновременно возникают:

- 1) максимальные нормальные напряжения от изгиба:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x};$$

- 2) касательные напряжения от изгиба, которыми ввиду их незначительности пренебрегаем;

- 3) касательное напряжение от кручения, достигающее наибольшего значения

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \text{ во всех точках контура круглого сечения и, в том числе, в двух точках}$$

А и В (опасные точки), в которых имеем максимальное значение. Приняв во внимание, что $W_p = 2 \cdot W_x$, можно написать:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{M_k}{2 \cdot W_x}$$

Любое из полученных напряжений (σ_{\max} и τ_{\max}), взятое в отдельности, может оказаться меньшим соответствующего ему (по виду его деформации) допускаемого напряжения, но одновременно их действие может быть опасным для бруса.

Главные напряжения определяются согласно формуле (11.6):

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Подставив вместо σ и τ их значения, получим:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x}{W_x} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{M_x}{W_x}\right)^2 + \left(\frac{M_k}{2 \cdot W_x}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{1}{2 \cdot W_x} \cdot \sqrt{M_x^2 + M_k^2}.$$

Вынеся за скобку $\frac{1}{2 \cdot W_x}$, получим окончательную формулу для определения главных напряжений при кручении с изгибом:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{1}{2 \cdot W_x} \cdot \left(M_x \pm \sqrt{M_x^2 + M_k^2} \right). \quad (30.1)$$

Теперь можно составить условия прочности бруса круглого сечения для наиболее напряженной его точки на основании третьей и энергетической теорий прочности.

1. По третьей теории прочности: $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ пользуясь формулой (30.1), можно написать:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{2 \cdot W_x} \cdot \left(M_x + \sqrt{M_x^2 + M_k^2} \right) - \frac{1}{2 \cdot W_x} \cdot \left(M_x - \sqrt{M_x^2 + M_k^2} \right) \leq [\sigma],$$

или $\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_k^2}}{W_x} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (30.2)$

где $M_{\text{расч}} = \sqrt{M_x^2 + M_k^2}$.

2. По энергетической (четвертой) теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \leq [\sigma]$$

произведя необходимые подстановки и преобразования, получим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_x^2 + 0,75 \cdot M_k^2}}{W_x} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (30.3)$$

где $M_{\text{расч}} = \sqrt{M_x^2 + 0,75 \cdot M_k^2}$.

§ 31. Продольный изгиб

До сих пор определение размеров поперечных сечений стержней мы производили из условий прочности и жесткости. Но практика работы конструкций показывает, что разрушение сжатого стержня может произойти не только от нарушения его прочности, но и от потери приданной ему при изготовлении формы равновесия.

Для примера возьмем деревянную чертежную линейку и приложим к ней продольную сжимающую нагрузку. Постепенно увеличивая ее, заметим, что ось линейки сначала остается почти прямолинейной, а затем при некоторой нагрузке, изменяющейся в дальнейшем очень мало, будет весьма быстро расти прогиб, и линейка ломается. При этом оказывается, что если определится напряжение в поперечном сечении линейки, как при простом сжатии, только от сжимающей силы, то оно будет во много раз меньше предела прочности материала, из которого она была

изготовлена. Отсюда следует, что причиной разрушения линейки является не нарушение условия прочности, а потеря приданной ей прямолинейной формы равновесия, т.е. потеря устойчивости, вызвавшая дополнительные напряжения от продольного изгиба.

Из изложенного становится очевидным, что для надежной работы конструкции, помимо прочности ее элементов, необходимо, чтобы они были устойчивы. Поэтому сжатые стержни, кроме проверки их на прочность должны быть проверены и на устойчивость.

Наибольшая сжимающая сила, до которой сохраняется устойчивость первоначальной формы равновесия стержня, называется критической силой и обозначается P_k .

Деформация стержня, выражающаяся в искривлении его под действием сжимающих сил, направленных вдоль его оси, называется продольным изгибом.

Напряжение в сечении сжатого стержня, вызываемое критической силой P_k , называется критическим напряжением и обозначается σ_k .

Следовательно:
$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} \quad (31.1)$$

Так как для сжатого стержня критические напряжения являются опасными, то для обеспечения устойчивости прямолинейной формы стержня, подверженного сжимающей силе P , следует добавить к условию прочности на сжатие еще условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_y], \quad (31.2)$$

где $[\sigma_y]$ - допускаемое напряжение на устойчивость, равное критическому напряжению, деленному на коэффициент запаса устойчивости K_y , т.е.

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{K_y} \quad (31.3)$$

§ 32. Формула Л. Эйлера для определения величины критической силы. Влияние способа закрепления концов стержня на величину критической силы

При расчете стержней на продольный изгиб иногда требуется определить величину критической силы P_k как наименьшую осевую сжимающую силу, при которой можно сохранить равновесие искривленного сжатого стержня. Впервые эта задача была решена Л. Эйлером:

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2} \quad (32.1)$$

Полученное выражение называется формулой Л. Эйлера в случае сжатия стержня с шарнирно закрепленными концами.

Для других способов закрепления концов стержня формула изменится.

Формулы, определяющие величину критической силы для всех четырех случаев, можно объединить в одну:

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} \quad (32.2)$$

В этой формуле коэффициент μ называется коэффициентом приведения длины, который зависит от способа закрепления концов стержня и численно равен $\frac{1}{n}$, где n - число полуволн.

При шарнирном закреплении концов $\mu = 1$;

при одном свободном и другом защемленном концах $\mu = 2$;

при обоих защемленных концах $\mu = 0,5$;

при одном защемленном, и другом шарнирном концах $\mu = 0,7$.

Величина произведения коэффициента приведения длины на действительную длину стержня l называется приведенной или расчетной длиной стержня и обозначается $l_{расч}$, т.е. $l_{расч} = \mu \cdot l$.

§ 33. Критическое напряжение. Гибкость стержня.

Пределы применимости формулы Л. Эйлера

Формула Ф. С. Ясинского. Допускаемое напряжение при продольном изгибе

Для определения величины критического напряжения σ_k следует величину критической силы P , разделить на площадь поперечного сечения F , т.е.

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2 \cdot F}.$$

На основании формул (13.14) и (13.15) можно написать: $I_{\min} = F \cdot i_{\min}^2$, тогда:

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot F \cdot i_{\min}^2}{(\mu \cdot l)^2 \cdot F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i_{\min}^2}{(\mu \cdot l)^2}.$$

Перенеся величину i_{\min}^2 в знаменатель, получим:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} \right)^2} \quad (33.1)$$

Отношение расчетной (приведенной) длины стержня к наименьшему радиусу инерции называется гибкостью стержня и обозначается буквой λ , т.е.

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}. \quad (33.2)$$

Введя обозначение гибкости стержня в формулу (33.1), получим:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (33.3)$$

Поэтому, если $\sigma_k \leq \sigma_{np}$, формула Эйлера применима, если же $\sigma_k \geq \sigma_{np}$, то неприменима. Очевидно, что границей применимости формулы Эйлера будет случай, когда $\sigma_k = \sigma_{np}$. Для практических целей удобнее выразить пределы применимости формулы Эйлера через гибкость λ .

Заменим в формуле (33.3) σ_k на σ_{np} (предел пропорциональности)

$\sigma_{np} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$ откуда определится значение предельной гибкости стержня:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{np}}}.$$

Приняв для стали Ст.3 $\sigma_{np} = 2000$ кг/см² и $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см², получим:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^6}{2000}} \cong 100,$$

т.е. если гибкость стержня $\lambda \geq 100$, то формула Эйлера применима, если же $\lambda \leq 100$, то неприменима.

Опыты показывают, что в тех случаях, когда критические напряжения получаются больше предела пропорциональности, то действительные критические силы оказываются на много меньше вычисленных по формуле Эйлера. Эта формула на практике оказалась применимой только для определенной категории стержней - гибких и длинных, т.е. с большой гибкостью λ . (Продольный изгиб в пределах упругих деформаций).

На основе опытных данных Ф. С. Ясинским была предложена эмпирическая формула для определения критического напряжения в сечениях стержней некоторых конструкционных материалов:

$$\sigma_k = A - B \cdot \lambda, \quad (33.4)$$

где А и В - коэффициенты, определяемые опытным путем.

Для стали Ст.3 формула (33.4) имеет вид:

$$\sigma_k = 3100 - 11,4 \cdot \lambda \text{ (кг/см}^2\text{)}. \quad (33.5)$$

Определив величину критического напряжения, можно вычислить критическую силу по формуле:

$$P_k = \sigma_k \cdot F. \quad (33.6)$$

Формула Ф. С. Ясинского пригодна не при всех значениях гибкости λ . На рис. 43 изображен график зависимости критического напряжения от гибкости для стали Ст.3.

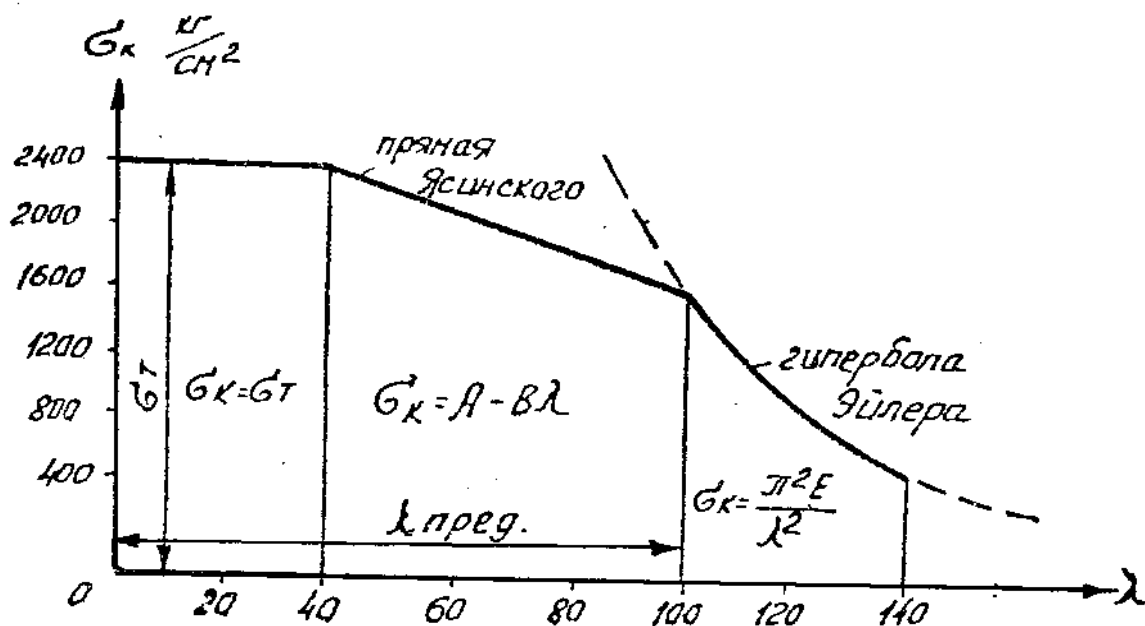


Рис. 43

Для гибкости от 0 до 40 критическое напряжение, примерно, постоянно; поэтому стержни рассчитывают не на устойчивость, а на прочность при осевом сжатии. Стержни со средней гибкостью, находящейся в пределах $40 \leq \lambda \leq 100$, рассчитывают по формуле Ф. С. Ясинского, так как продольный изгиб наблюдается в пластической стадии.

Перейдем теперь к вопросу о допуске напряжении при продольном изгибе, которое можно определить при больших гибкостях ($\lambda \geq 100$) по формуле (33.3), а при средних гибкостях ($40 \leq \lambda \leq 100$) по формулам (33.4) и (33.5), разделив найденное по ним значение критической силы на коэффициент запаса K_y .

Коэффициент запаса устойчивости K_y принимают: для стали от 1,8 до 3; для дерева от 2,8 до 3,2.

Следовательно, для каждого значения гибкости λ , можно определить свое значение допускаемого напряжения при продольном изгибе:

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{K_y} \quad (33.7)$$

§ 34. Коэффициент уменьшения допускаемого напряжения на сжатие при продольном изгибе.

Расчет сжатых стержней с помощью таблиц

Было установлено, что сжатые стержни должны быть проверены по двум условиям:

а) по условию прочности -
$$\sigma = \frac{P}{F_{KT}} \leq [\sigma], \quad (34.1),$$

где $[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{K}$ ($\sigma_{пред} = \sigma_T$ или $\sigma_{пред} = \sigma_s$);

б) по условию устойчивости -
$$\sigma = \frac{P}{F_{\bar{b}p}} \leq [\sigma_y] = \frac{\sigma_\kappa}{K_y} \quad (34.2)$$

В предыдущем параграфе указывалось, что допускаемое напряжение на устойчивость не является постоянным для одного и того же материала, а зависит от гибкости стержня λ .

Выясним, как связаны допускаемые напряжения на устойчивость с допускаемыми напряжениями на прочность. Для этого составим их отношение:

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_\kappa \cdot K}{K_y \cdot \sigma_{пред}},$$

откуда
$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_\kappa \cdot K}{K_y \cdot \sigma_{пред}} \cdot [\sigma].$$

Обозначив выражение, стоящее в правой части равенства перед $[\sigma]$ через φ получим:

$$[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma],$$

где

$$\varphi = \frac{\sigma_\kappa \cdot K}{K_y \cdot \sigma_{пред}} \quad (34.3)$$

Коэффициент φ называется коэффициентом уменьшения основного допускаемого напряжения $[\sigma]$ при продольном изгибе (коэффициентом продольного изгиба). Величина его всегда меньше единицы.

Теперь расчетную формулу на устойчивость можно представить в следующем виде:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi \cdot [\sigma], \quad (34.4)$$

где $[\sigma]$ - основное допускаемое напряжение при осевом сжатии.

Задачи на продольный изгиб можно разделить на три группы:

1. Определение допустимой нагрузки на стержень при известной длине, способе закрепления концов, площади поперечного сечения и вида материала.
2. Подбор сечения стержня по заданной длине, способе закрепления концов, вида материала и величине сжимающей силы.

Проверка на устойчивость продольно-сжатых стержней.